



ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ

КВАНТ+

№5-6/2011



ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ
МАТЕРИАЛЫ

2011 ГОДА

Приложение к журналу

«КВАНТ⁺»

№5-6/2011

**Экзаменационные материалы
по математике и физике
2011 года**

Составители

С.А.Дориченко, А.А.Егоров,

В.А.Тихомирова

Москва
Издательство МЦНМО
2012

УДК 373.167.1:[51+53]
ББК 22.1я721+22.3я721
Э36

Приложение
к журналу «Квант⁺»
№5-6/2011

Э36 Экзаменационные материалы по математике и физике 2011 года / Составители С.А.Дориченко, А.А.Егоров, В.А.Тихомирова. – М.: Издательство МЦНМО, 2012. – 160 с. (Приложение к журналу «Квант⁺» №5-6/2011.)

ISBN 978-5-94057-952-6

В книгу включены варианты единого государственного экзамена (ЕГЭ) по физике, задачи олимпиад и материалы вступительных экзаменов по математике и физике в различные вузы страны в 2011 году.

Книга адресована выпускникам средних школ, лицеев и гимназий, слушателям подготовительных отделений и курсов, а также всем тем, кто самостоятельно готовится к поступлению в вуз.

ББК 22.1я721+22.3я721

ISBN 978-5-94057-952-6

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие		4
	Задачи	Ответы
ЕГЭ по физике	5	83
Межрегиональная олимпиада по математике	24	88
Олимпиада «Ломоносов-2011»	26	90
Олимпиада «Покори Воробьевы горы»	35	108
Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ	38	118
Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана	43	120
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова	55	126
Московский физико-технический институт	58	133
Национальный исследовательский университет «МИЭТ»	62	145
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»	69	146
Новосибирский государственный университет	71	152
Российский государственный университет нефти и газа имени И.М.Губкина	73	155
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет	77	157

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-механический факультет)

1. Упростите выражение $\frac{(a+2)(a+4)+1}{a+3}$.

2. Найдите все натуральные двузначные числа, которые делятся одновременно на 4 и на 22.

3. Найдите целое число — значение выражения $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{1-\sqrt{2}}$.

4. Решите уравнение $\sqrt{x^2+5} = x+5$.

5. Решите неравенство $\frac{x}{x^2+6} \geq \frac{1}{5}$.

6. Найдите значение выражения $\arctg(\operatorname{ctg}(5\pi/6))$.

7. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi/6)$.

8. Решите неравенство $\operatorname{arccctg} x - \operatorname{arctg} x \geq \pi$.

9. Найдите целое число — значение выражения $\log_3 2 - \log_3 5 \log_5 54$.

10. Решите уравнение $8 \cdot 2^{x^2} = 16^x$.

11. Решите неравенство $\lg(x+2) \leq \lg(4-x)$.

12. Найдите функцию $y = f(x)$, график которой симметричен графику функции $y = -x^2$ относительно точки $(1; 0)$.

13. Найдите область определения функции $y = \lg(\arccos x)$.

14. Найдите множество значений функции $y = x^2 - 4|x|$.

15. Найдите сумму S_n первых n членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $S_2 = 8$, а $S_3 = 15$.

16. Найдите знаменатель q бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если отношение суммы первых трех ее элементов к первому элементу равно $21/16$.

17. На окружности $x^2 + y^2 = 1$ найдите все точки, касательная в которых имеет угловой коэффициент $1/2$.

18. Найдите величину угла между двумя сторонами треугольника с длинами 4 и 12, если проведенная к третьей стороне биссектриса имеет длину 3.

19. Найдите сторону основания правильной шестиугольной призмы, если отношение ее объема к площади боковой поверхности равно $\sqrt{3}$.

20. Найдите все значения параметра a , при которых у системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ xy = a \end{cases}$$

нет решений.

Вариант 2

(физико-технический факультет)

1. Найдите целое число — значение выражения $\sqrt[3]{37 + 30\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}$.

2. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{3x-18} = \sqrt[3]{4x-20}.$$

3. Найдите все такие пары (m, n) натуральных чисел, для которых $3^m = n^2 + 2n - 8$.

4. Решите неравенство

$$4 \cdot 9^x + 3 \cdot 6^x - 27 \cdot 2^{2x} \leq 0.$$

5. Найдите целое число — значение выражения $\log_3^2 45 - \log_3 15 \log_3 5 - \log_3 125$.

6. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{9 \sin^2 x + 24 \sin x + 20}{3 \sin x + 4}.$$

7. Медианы треугольника имеют длины $\sqrt{105}$, $\sqrt{33}$, $2\sqrt{33}$. Найдите длину большей стороны треугольника.

8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sqrt{(x-2)(12-x)} = 10 + a(x-2)$$

имеет ровно два различных решения.

Заключительный тур

1. Две точки равномерно двигаются по окружности радиусом R . Первая точка, двигаясь по часовой стрелке, делает один оборот за время T_1 , вторая точка, двигаясь против часовой стрелки, делает один оборот за время T_2 . Какой путь проходит первая точка между двумя последовательными встречами со второй?

2. На движущееся тело в течение 3 с в направлении его движения действует сила 1 Н, а затем в течение еще 4 с в противоположном направлении действует сила 3 Н. В результате действия этих сил импульс тела, не изменившись по величине, поменял направление на противоположное. Найдите импульс тела перед началом действия сил.

3. Шайба массой m соскальзывает по желобу, который переходит в петлю радиусом R . На высоте $2R$ от основания желоба кинетическая энергия шайбы составляет четверть потенциальной энергии (отсчитываемой от нижней точки). Чему равна сила давления шайбы на желоб в нижней точке петли, если силами трения можно пренебречь?

4. В сосуд, в котором находятся две несмешивающиеся жидкости плотностями $0,8 \text{ г/см}^3$ и 2 г/см^3 , опускают тело плотностью $1,2 \text{ г/см}^3$. При этом тело оказывается полностью погружено в жидкость. Определите, какая часть объема тела будет находиться в нижней жидкости.

5. В вертикальном открытом сверху цилиндре под поршнем находится идеальный газ. Поршень соединен с дном цилиндра пружиной жесткостью k и в равновесии при температуре T располагается на высоте H_1 . На поршень ставят груз массой m . В результате поршень устанавливается на высоте H_2 при той же температуре. Найдите число молей газа под поршнем.

6. С идеальным газом проводят циклический процесс, изображенный на графике в координатах p, T (рис.1). Укажите, на каких участках графика газ получает тепло.

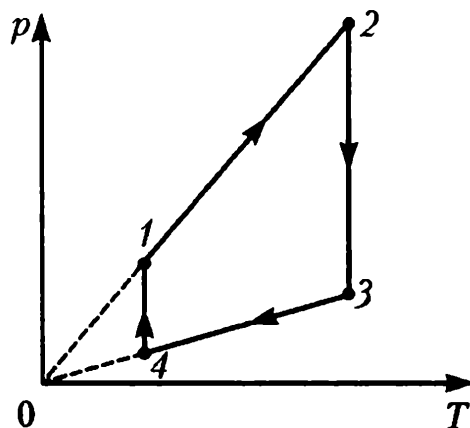


Рис. 1

7. Электрон влетает в плоский конденсатор с длиной пластин 10 см и напряженностью электрического поля 40 кВ/м под углом 30° к пластинам. Какова первоначальная энергия электрона, если он вылетел из конденсатора также под углом 30° к пластинам?

8. Батарейка замкнута на три соединенных параллельно резистора, сопротивление каждого из которых в 3 раза больше внутреннего сопротивления батарейки. Как и во сколько раз изменится напряжение на контактах батарейки, если замкнуть ее на те же резисторы, но соединенные последовательно?

9. В колебательном контуре, состоящем из конденсатора и катушки индуктивности, происходят гармонические колебания. Заряд на пластинах конденсатора изменяется по закону $q(t) = 2,5 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ (мкКл). В некоторый момент времени энергия катушки индуктивности составила 2,25 мкДж. Найдите

напряжение на обкладках конденсатора в этот момент времени, если его емкость равна 0,5 мкФ.

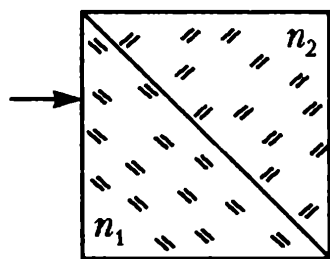


Рис. 2

10. На боковую поверхность кубика, изготовленного из двух треугольных призм с показателями преломления $n_1 = 2,0$ и $n_2 = 1,6$, падает нормально луч света (рис.2). Найдите угол, под которым свет выходит из противоположной грани кубика.

Политехническая (комплексная) олимпиада

Заключительный тур

МАТЕМАТИКА

См. вариант 2 письменного экзамена.

ФИЗИКА

1. Линия пересечения двух взаимно перпендикулярных гладких наклонных плоскостей расположена горизонтально. Два небольших тела начинают соскальзывать из точки на ребре по этим плоскостям в разные стороны. Как будет зависеть от времени модуль относительной скорости тел?

2. Шарик падает с высоты H на горизонтальную поверхность. На какую высоту он подскочит после неупругого удара, при котором половина его кинетической энергии переходит в тепло?

3. Определите молярную массу смеси кислорода и водорода, в которой молекул водорода в три раза меньше, чем кислорода.

Молярные массы кислорода и водорода равны 32 г/моль и 2 г/моль соответственно.

4. В вершинах равностороннего треугольника со стороной a расположены три одинаковых заряда q . Чему равна напряженность электрического поля в середине стороны треугольника?

5. Какое количество теплоты выделится в резисторе сопротивлением R после размыкания цепи, если известны ЭДС источника \mathcal{E} , индуктивность катушки L и сопротивление второго резистора r (рис.3)?

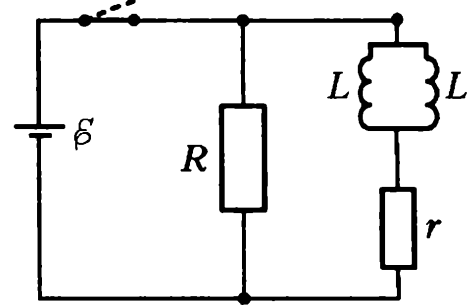


Рис. 3

6. Луч света внутри стеклянной пластины с показателем преломления n падает на ее горизонтальную поверхность, граничащую с воздухом, под углом α , большим угла полного внутреннего отражения. На поверхность стекла наливают жидкость. При каком минимальном значении показателя преломления жидкости луч выйдет из стекла?

ИНФОРМАТИКА

1. Используя процедуры `Black()` и `White()`, которые выводят на экран черный или белый прямоугольник размером в 1 символ и перемещают курсор на следующую позицию, и процедуру `NewLine()`, перемещающую курсор в начало следующей строки, опишите алгоритм построения изображения размером $N * (2 * N + 2)$ (рис.4; $N = 5$).

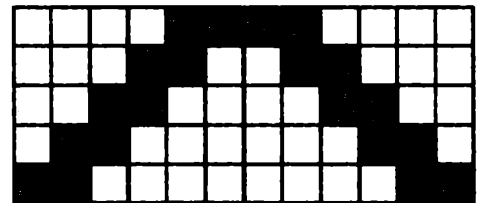


Рис. 4

2. Преподаватель математики при проверке работ ставит оценки 2, 3, 4 и 5 с равной вероятностью. У преподавателя же физики есть система: за половину проверяемых работ он ставит двойки, за четверть – тройки, за восьмую часть – четверки, за восьмую – пятерки. Оплата труда преподавателя по проверке одной работы пропорциональна среднему количеству информации в одной оценке. За проверку работ одиннадцатиклассников математик получил 1000 руб. Сколько получит физик за проверку работ тех же одиннадцатиклассников?

3. В физико-математической школе, где чем выше оценка, тем меньше ее вероятность, для кодирования оценок применяют неравномерный код: единице соответствует код 0, двойке – 10, тройке – 110, четверке – 1110, пятерке – 1111. Разработайте и опишите в виде блок-схемы алгоритм расшифровки последова-

	A	B	C
1		1	3
2		4	5
3			2
4		7	0
5		33	
6	4,75		

	A	B	C
1		1	3
2		4	5
3			2
4		7	0
5	=СУММ(A1:A4)	=СУММ(A1:B4)	
6	=СРЗНАЧ(A1:A4)	= $\$A\$5 * СУММ(B1:B4) + \$B\3	

Рис. 5

тельности закодированных оценок. Предполагается, что массив битов B из N элементов (элемент массива будем обозначать как B_i , $i = 1 \dots N$) передан в качестве параметра.

4. Вовочка купил билет в автобусе, перевел его номер в двоичную систему и оказалось, что билет у него счастливый – сумма цифр в левой половине номера совпала с суммой в правой: 10111110. Каким будет номер следующего двоично-счастливого билета, если известно, что номера билетов в катушке у кондуктора идут подряд в порядке возрастания? Ответ дайте в десятичной системе счисления.

5. На рисунке 5 приведены два изображения таблицы MS Excel. Правое отличается от левого тем, что установлен режим показа формул, а не значений, и убран черный фон с ячеек с формулами. Какое значение появится в таблице в ячейке C6, если скопировать туда формулу из ячейки B6?

6. На рисунке 6 приведена блок-схема алгоритма (mod – остаток от деления, div – деление нацело). Каким будет наименьшее из выведенных в ходе исполнения алгоритма чисел, если ввести значения $A = 78$, $B = 82$, $K = 3$?

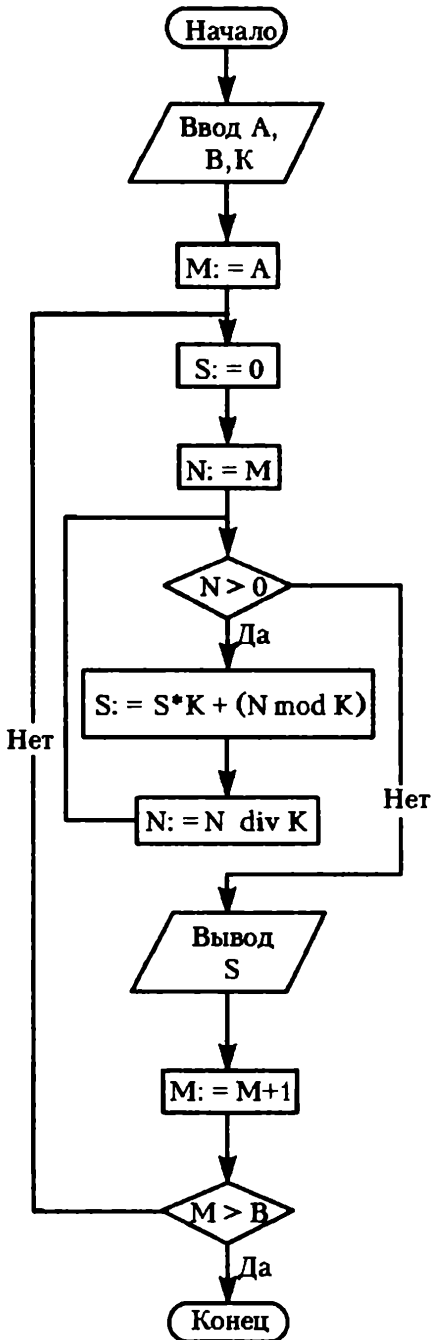


Рис. 6

Публикацию подготовили Т.Андреева, А.Басов, Е.Крылова, С.Михрин, А.Моисеев, С.Преображенский, В.Родионов, А.Щукин

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $a + 3$. 2. 44; 88. 3. -2 . 4. -2 . 5. $[2; 3]$. 6. $-\pi/3$.
7. $\pi/6 + k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. 8. $(-\infty; -1]$. 9. -3 . 10. 1; 3. 11. $(-2; 1]$.
12. $y = (x - 2)^2$. 13. $[-1; 1)$. 14. $[-4; +\infty)$. 15. $n^2 + 2n$. 16. $1/4$.
17. $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. 18. $2\pi/3$. 19. 4.
20. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Вариант 2

1. 1. 2. 2; 5; 6. 3. (3; 5). 4. $(-\infty; 2]$. 5. 4. 6. $\left[4; \frac{53}{7}\right]$. 7. 14.
8. $\left[-1; -\frac{3}{4}\right)$.

ФИЗИКА

Региональная олимпиада школьников Санкт-Петербурга для профессионально-ориентированной молодежи

Вариант 1

1. $s_1 = 2\pi R \frac{T_2}{T_1 + T_2}$. 2. $p_0 = \frac{F_2 \Delta t_2 - F_1 \Delta t_1}{2} = 4,5 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$.
3. $F = 6mg$. 4. $\eta = \frac{\rho_r - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{1}{3}$.
5. $v = \frac{mg - k(H_1 - H_2)}{RT} \frac{H_1 H_2}{H_1 - H_2}$.
6. Тепло подводится на участках $1 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 3$.
7. $W = \frac{eEL}{2 \sin 2\alpha} = 2,3 \cdot 10^3 \text{ эВ} = 3,7 \cdot 10^{-16} \text{ Дж}$.

$$8. \frac{U_2}{U_1} = \frac{9}{5} = 1,8.$$

$$9. U = \sqrt{\frac{q_{\max}^2}{C^2} - \frac{2W_L}{C}} = 4 \text{ В}.$$

$$10. \sin \gamma = \frac{1}{2} \left(n_1 - \sqrt{2n_2^2 - n_1^2} \right) \approx 0,47.$$

Политехническая (комплексная) олимпиада

ФИЗИКА

$$1. v_{\text{отн}} = gt. \quad 2. h = \frac{H}{2}.$$

$$3. M_{\text{смеси}} = \frac{M_{\text{H}_2} + 3M_{\text{O}_2}}{4} = 24,5 \text{ г/моль}. \quad 4. E = \frac{q}{3\pi\epsilon_0 a^2}.$$

$$5. Q_R = \frac{RL\epsilon^2}{4r^2(R+r)}. \quad 6. n_{\text{ж min}} = n \sin \alpha.$$

ИНФОРМАТИКА

1. Алгоритм может быть описан на любом языке программирования, в псевдокоде или в виде блок-схемы. Варианты: вместо цикла до $2 \times$ дважды вызывать Black(), пределы цикла для рисования внутренних белых могут формулироваться иначе.

```

For i = 1 To n
    For k = 1 To n - i
        White()
    Next
    For k = 1 To 2
        Black()
    Next
    For k = 1 To (i - 1) * 2
        White()
    Next
    For k = 1 To 2
        Black()
    Next
    For k = 1 To n - i
        White()
    Next
NewLine()
Next

```

2. Объем информации в оценке по математике равен $\log_2 4 = 2$ бита (рассчитываем по формуле Хартли, так как оценки равновероятны). Объем информации в оценке по физике равен

$$0,5 \log_2 2 + 0,25 \log_2 4 +$$

$$+ 2 \cdot 0,125 \log_2 8 = 1,75 \text{ бита}$$

(формула Шеннона – оценки имеют разную вероятность). Заработок физика равен

$$\frac{1000 \text{ руб.}}{2} \cdot 1,75 = 875 \text{ руб.}$$

3. Описание алгоритма – именно блок-схема. Один из вариантов решения – на схеме (рис.26). Возможны другие варианты – принципиален цикл по всем элементам входного массива.

4. Переводить данный номер в десятичную систему не нужно. При 1011 в левой части счастливых билетов уже не будет. Далее левая часть будет 1100, а ближайший билет с двумя единицами в правой части 11000011. В десятичной системе: $1 + 2 + 64 + 128 = 195$.

5. Если среднее арифметическое A1:A4 равно 4,75, то их сумма равна $4,75 \cdot 4 = 19$. Это значение ячейки A5. Сумма A1:B4 равна 33, тогда сумма B1:B4 равна $33 - 19 = 14$, и значение B3 будет $14 - 1 - 4 - 7 = 2$. Формула при тиражировании превратится в $\$A\$5 \cdot \text{СУММ}(C1:C4) + \$B\$3$, значение ее $19 \cdot (3 + 2 + 5 + 0) + 2 = 192$.

6. Алгоритм перебирает все натуральные числа от A до B и для каждого выводит итог его реверса по основанию K: число переводится в K-ичную систему, записывается «задом наперед» и переводится обратно в десятичную. Если это уяснить, то сразу понятно, что наименьшее значение даст заключенная в интервале степень K, это 81, и превратится оно после реверса в 1.

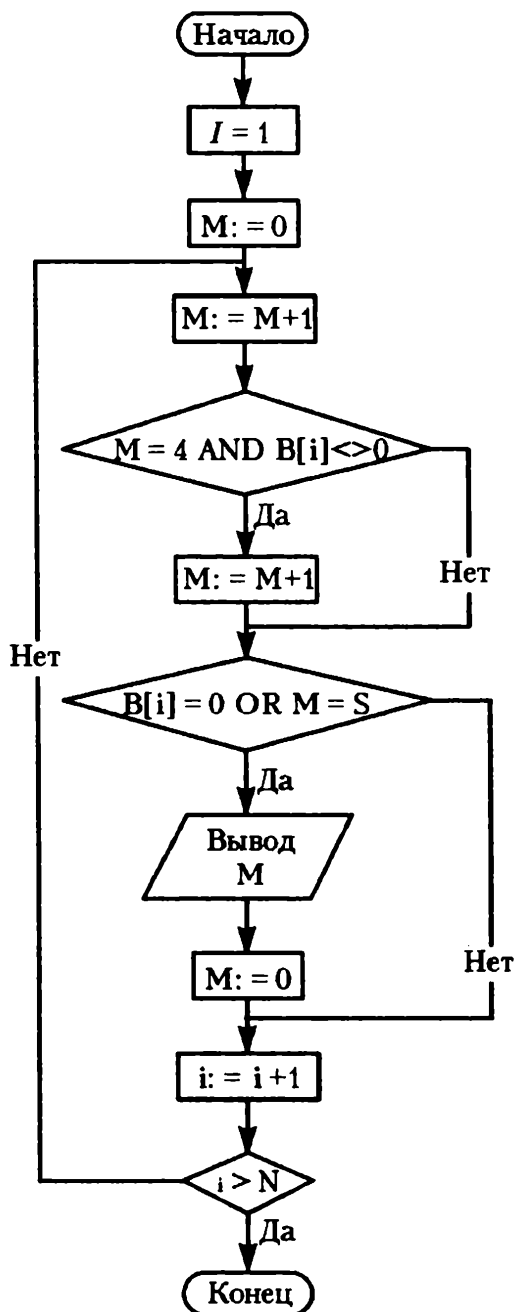


Рис. 26