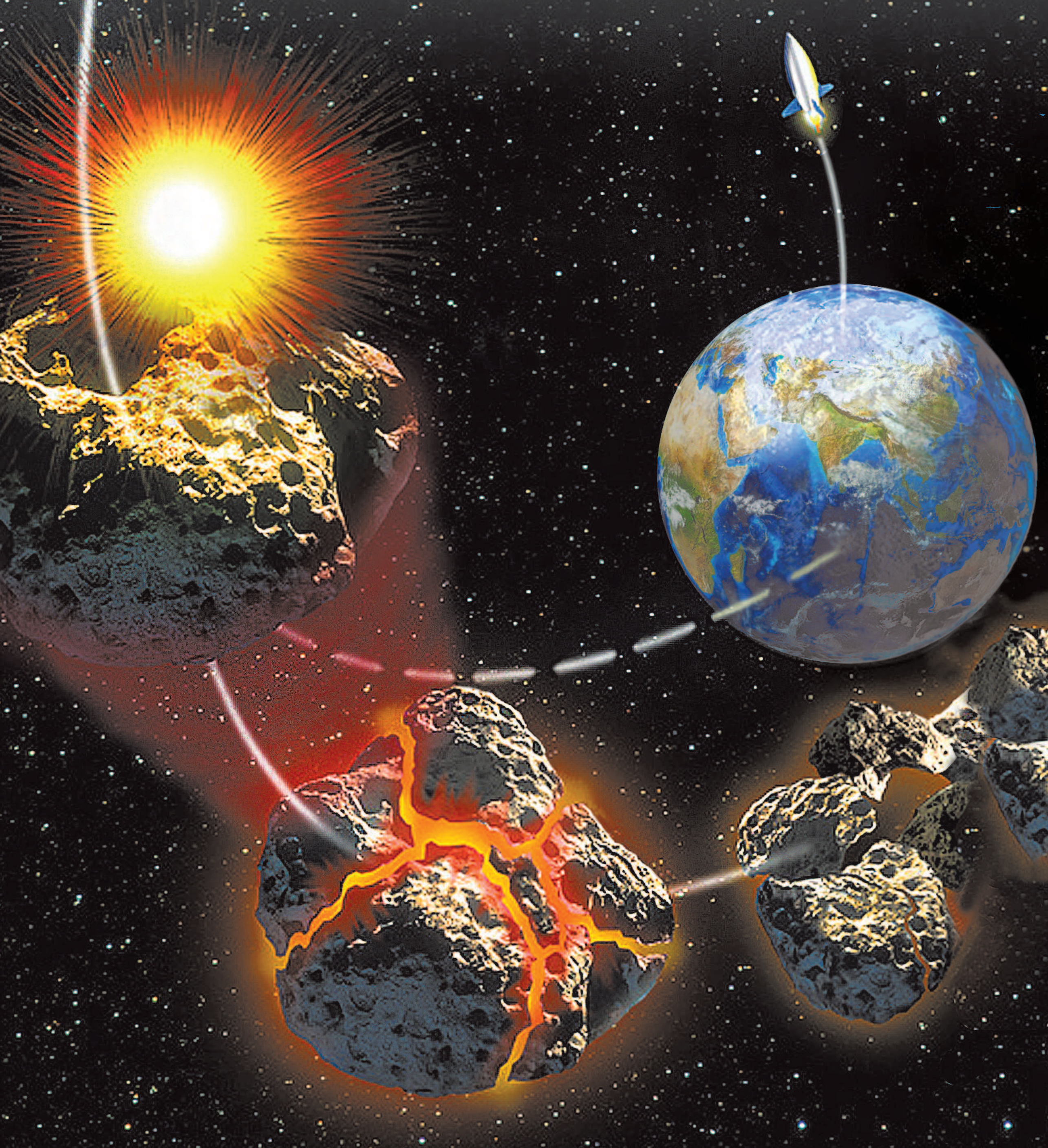
ISSN 0130-2221
2022 · № 9
СЕНТЯБРЬ

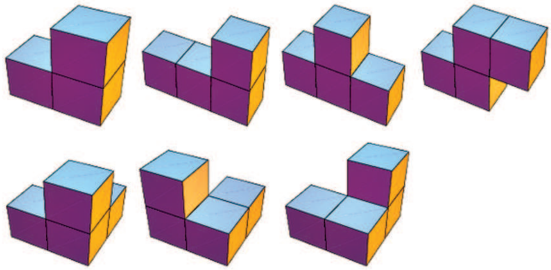
КВАНТ

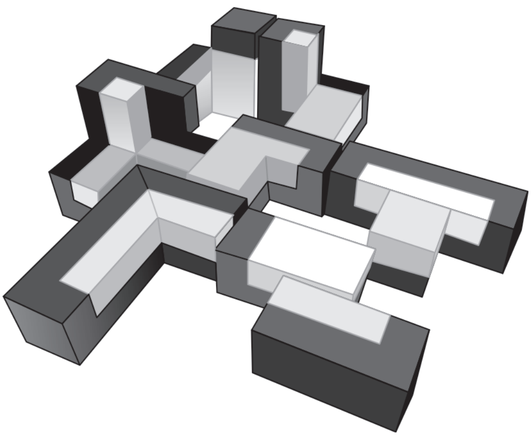
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



КУБИКИ СОМА и печенье ОРЕО

«Квант» уже неоднократно рассказывал о придуманной Питом Хейном в 1933 году головоломке «Кубики сома» и ее многочисленных вариантах (см., например, «Квант» № 5, 7 и 10 за 2020 г.).
В исходной головоломке требуется собрать куб 3×3×3 из семи деталей, показанных на первом рисунке.





Недавно известный голландский автор головоломок Оскар ван Девентер (Oskar van Deventer) предложил еще один вариант «Кубиков сома». В нем используются все те же семь деталей, но каждая из них окрашена в два цвета, белый и черный. Задача – собрать куб 3×3×3 так, чтобы белых частей снаружи не было видно. Раскраска деталей показана на втором рисунке.

Цвета подобраны так, что почти собранная головоломка напоминает известное печенье «Oreo»: два темных шоколадных бисквита склеены сладким белым кремом. Видимо, ван Девентер настолько любит это печенье, что посвятил ему одно из своих творений.

Желаем успеха в решении этой головоломки!

Е.Епифанов

КВАНТ

СЕНТЯБРЬ 2022 № 9

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Проблемы конденсатора

Л.АШКИНАЗИ

У любого устройства могут быть проблемы двух типов. Теоретические – связанные с пониманием его работы, с его теорией и расчетом. Практические – связанные с его применением и использованием. Разумеется, могут возникнуть проблемы, которые связаны одновременно и с практикой и с теорией, причем таких со временем становится все больше. Например, на начальном этапе существования корабля и самолета люди как-то обходились поиском вслепую, чистым экспериментом, потом возникла соответствующая наука, ныне без математики и физики вообще ничего не плавает и не летает.

В этой статье мы назовем несколько проблем, касающихся конденсаторов. Причем какие-то из них просто упомянем для полноты картины, а некоторые рассмотрим подробнее. Начнем с проблем теоретических. Ну, скажем, с одного почти школьного вопроса.

Насколько мал должен быть зазор

Формула для емкости сферического конденсатора, при выводе которой используется выражение для потенциала заряженной сферы, выглядит так:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Обозначения стандартны и вам известны. Эта формула в рамках модели является точной, но что значит «в рамках модели»? Например, мы считаем, что ε – постоянная величина, причем это даже видно из формулы. Если бы величина ε зависела хотя бы – это простейший случай – от R, формула выглядела бы иначе. А если бы ε зависела от напряженности электрического поля (так происходит в нелинейных диэлектриках), то емкость стала бы зависеть от напряжения. Электрическое поле проникает в проводники, хотя и недалеко – на расстояния, сравнимые с межатомными. Поэтому при малых величинах зазора $R_2 - R_1$ можно ожидать каких-либо отклонений.

«Ужас» этого типа встречается в физике часто – мы считаем среды непрерывными, их параметры (плотность, электро- и теплопроводность, оптические свойства и т.п.) задаем числами, от точки к точке если и изменяющимися, то на расстояниях, гораздо больших расстояний между атомами. Но когда речь заходит о размерах, сравнимых с межатомными, эта картина перестает быть адекватной. Среды перестают быть непрерывными! Некорректное выражение «сила приложена в точке» становится вообще бессмысленным – вдруг мы приложим силу в зазор между атомами? Но, не будем о страшном.

Из приведенной формулы для C обычно делают два вывода. Устремляя R_2 к бесконечности, получают емкость уединенного тела (в данном случае – шара):

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1.$$

Но на практике никаких бесконечностей нет, так какой же смысл в этой формуле? Смысл на самом деле простой – если R_2 больше R_1 в k раз, то относительная погрешность этой формулы оказывается равной $1/k$ (попробуйте получить этот результат). Иными словами, если шар имеет радиус 20 см, а расстояние до окружающих, как правило заземленных, частей оборудования будет 5 м, то погрешность формулы составит 4% – скорее всего, допустимую величину.

Далее, рассматривая приближение $R_2 - R_1 \ll R_1$, обозначая $R_2 - R_1 = d$ и вспо-

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220901

миная формулу площади сферы $S = 4\pi R^2$, получают формулу для емкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

При этом иногда говорят, что d должно быть мало, а иногда и не говорят. Однако, когда мы при выводе использовали приближение $d \ll R_1$, мы поступали правильно, а где у нас, в нашем теперь плоском конденсаторе, величина R_1? Ее там нет, и нам не с чем сравнивать d, а без этого слова «d мало» лишены физического смысла. В физике говорить про величину, мала она или велика, можно, только если есть величина, с которой мы ее сравниваем. Причем обе величины должны быть одной размерности, иначе и сравнивать нельзя. Можно, конечно, апеллируя к выводу, сказать, что R это примерно $(S/(4\pi))^{1/2}$, и сравнивать d с этой величиной, но это будет жульничество. И вот почему. Формула для связи S и R, которая действует для сферы, не обязана быть верной для плоской пластины конденсатора. Более того, площадь у плоской фигуры есть, а величины R может и не быть. Формально можно выкрутиться, если пластина, например, квадрат. А если она совсем не похожа на квадрат?

Пусть, например, конденсатор – это две длинные узкие полоски, расположенные одна напротив другой. Это – распространенный в электронике объект, так называемая «полосковая линия». Похоже, что в этом случае для применимости формулы нужно, чтобы зазор был много меньше узкой стороны. Узкая сторона равна отношению площади S к периметру P, т.е. наше условие будет таким: $d \ll S/P$. А если это не вполне прямая полоска и при том же S у нас окажется большая величина P? Ну что ж, тогда наше условие окажется более жестким, но тоже правильным. Важно вот что: сила нашего «много меньше», как и всегда в физике, определяется требованиями к точности в конкретной ситуации, при решении конкретной задачи. Чем большей точности,

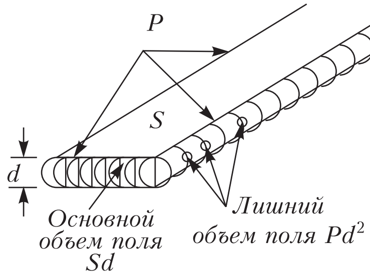


Рис. 1. Плоский конденсатор. Показан объем поля внутри, т.е. между пластинами, и объем поля вне пластин

т.е. меньшей погрешности, мы хотим, чем более сильными должны быть ограничения.

Заметим, что условие $d \ll S/P$ можно получить и другим методом. Сравните объем пространства, занятый электрическим полем между пластинами – это Sd, и основной частью поля вне пластин – это порядка Pd^2 (рис. 1). Тогда относительная лишняя емкость будет Pd/S, отсюда (выведите сами) наше условие $d \ll S/P$. Для получения более аккуратной оценки можно было бы учесть, что диэлектрическая проницаемость среды ε может быть разной между пластинами и снаружи. Но не будем этим заморачиваться, тем более что на практике это не всегда так. Бывает, что и внутри и снаружи $\varepsilon = 1$ (вакуумные и воздушные конденсаторы; рис. 2), а

Рис. 2. Вакуумные конденсаторы. В качестве электродов – цилиндры

Рис. 3. Керамические конденсаторы. Весь объем занят керамикой, а электроды — маленькие диски, один под гайкой (где выпуклость на краске)

бывает, что хота $\varepsilon \neq 1$, но одинаковое снаружи и внутри (высоковольтные керамические конденсаторы; рис. 3).

Неправильно заряженный конденсатор

Услышав заданный добрым экзаменатором вопрос о том, чему равен заряд конденсатора, надо насторожиться. Правильный ответ таков: это зависит от того, что это за конденсатор, что с ним делали раньше и делают сейчас. Например, если у него два электрода из обычного проводника и они закорочены, то... Можно ли сказать, что на них обоих отсутствуют заряды? Нет, эту систему могли зарядить «как целое». Тогда на электродах равные заряды? Опять нет. Пусть это сферический или цилиндрический конденсатор, тогда на внутреннем электроде какой заряд? Ну да, ноль. А если у этого конденсатора один электрод? Если это уединенный шар? Ну, тогда на нем любой заряд. А где кончаются силовые линии? На окружающих предметах. А если это уединенный шар посреди бесконечной пустой вселенной? Тогда можно сказать, что этот шар было нечем заряжать.

Ладно, пусть это обычный конденсатор, две плоские параллельные квадратные пластины из алюминия толщиной 1 мм и площадью 16 см^2. Каковы заряды? Если мы не рассматриваем пробой (о нем ниже), то любые. А напишите-ка формулу для энергии конденсатора – просит вас добрый экзаменатор. Вы пишите $E = \frac{CU^2}{2}$, а вас спрашивают: что, энергия не зависит от заряда? Вы улыбаетесь, как майская роза, и пишите $E = \frac{QU}{2} = \frac{Q^2}{2C}$ и с улыбкой поясняете, что все эти формулы эквивалентны, поскольку связаны через определение емкости, и что они (вот это всерьез важно) применимы в ситуации $Q_1 = -Q_2$. Вы сами шагнули в ловушку. Вас спрашивают: а что делать, если Q_1 и Q_2 – любые?

Начнем с чисто формального признака. Если у нас есть в задаче два объекта с одинаковыми наборами параметров, например два тела массами m_1 и m_2, а в формулу входит одинокое m, то либо где-то ошибка, либо есть какое-то условие типа $m_1 \ll m_2$ или $m_1 = m_2$. Хорошо бы это место найти и это условие проверить и осознать. В конденсаторе у нас, как мы уже договорились, две пластины, обе они могут иметь заряды, почему же в формуле только один заряд и какой из них?

Во-первых, есть формулы, в которые заряд не входит, это формулы для емкости сферического, цилиндрического и плоского конденсаторов. С ними все просто, а вот дальше начинаются сложности. Причем даже формулу $C = Q/U$, которую мы использовали как определение самого понятия емкости, применить для ситуации с двумя произвольными зарядами на двух пластинах мы не сможем. Определение емкости мы давали, совершая определенную процедуру, а именно – перенос заряда с одной пластины на другую, которая обеспечивала нам условие $Q_1 = -Q_2$, или просто сразу сказали, что $Q_1 = -Q_2$. Заметим, что использовать альтернативное условие $Q_1 = Q_2$ нельзя потому, что в силу симметрии напряжение между пластинами в этом случае будет $U = 0$. Но и условие $Q_1 \ll Q_2$ использовать тоже не получится – раз уж мы заинтересовались ситуацией $Q_1 \neq Q_2$, нельзя ограничивать соотношение зарядов.

Можно было бы пойти по оригинальному пути – дать новое определение, корректно связанное со старым. Для этого нам пришлось бы для какой-то геометрии, например для двух параллельных пластин, вычислить разность потенциалов при наличии на пластинах разных зарядов, убедиться, что формула совпадает со старой при условии $Q_1 = -Q_2$ и что множитель «C», который мы назвали бы, конечно, емкостью, имеет обычный смысл. На то, чтобы дать новое определение и переписать учебники, мы не претендуем, но решить эту задачу все равно надо.

Итак, пусть две параллельные проводящие пластины заряжены зарядами Q_1 и Q_2. Заряды разбегутся по поверхностям пластин. Будем считать задачу одномерной, т.е. напряженность поля зависит только от координаты, перпендикулярной пластинам. Иногда вместо термина «одномерная задача» говорят «пренебрежем краевыми эффектами», а иногда «будем считать пластины большими, а зазор – маленьким». Это одно и то же, или нет, или иногда одно, а иногда нет? Это хорошая тема, но данная статья – о другом. А чтобы вы не считали, что физики – самые большие зануды, заметим, что понятие «треугольник» в разных учебниках и справочниках по математике определяется по-разному, биологи по-разному определяют понятие «вид», а что творится у химиков, вам расскажут химики. Если же говорить серьезно, то мы сейчас робко прикоснулись к важному вопросу.

Обозначив заряды, как показано на рисунке 4 (в – верхний, н – нижний), получаем такие уравнения:

$$Q_{1в} + Q_{1н} = Q_1,$$

$$Q_{2в} + Q_{2н} = Q_2,$$

$$Q_{1в} - Q_{1н} - Q_{2в} - Q_{2н} = 0,$$

$$Q_{1в} + Q_{1н} + Q_{2в} - Q_{2н} = 0.$$

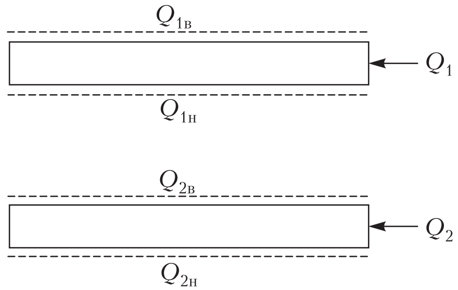


Рис. 4. Распределение зарядов на сторонах пластин

Первые два уравнения – это просто закон сохранения заряда. А откуда взялись остальные два? Какое физическое свойство стоит на ними? Подсказка – это какое-то свойство электрического поля. Конечно, поле внутри проводника равно нулю. Решив эту систему, находим

$$Q_{1в} = \frac{Q_1 + Q_2}{2},$$

$$Q_{2н} = \frac{Q_1 + Q_2}{2},$$

$$Q_{1н} = \frac{Q_1 - Q_2}{2},$$

$$Q_{2в} = \frac{Q_2 - Q_1}{2}.$$

Первые две строки означают, что снаружи и издалека система выглядит, как одна пластина, на которую принесли суммарный заряд и он по ней разбежался – по обеим сторонам. Вторые две строки означают, что изнутри система выглядит, как нормальный конденсатор, только вместо зарядов Q и $-Q$ он заряжался зарядами $\frac{Q_1 - Q_2}{2}$ и $\frac{Q_2 - Q_1}{2}$. Поэтому разность потенциалов между пластинами будет равна $U = \frac{Q_1 - Q_2}{2C}$, где величина C имеет обычный смысл, т.е. формулы для емкости сферического, цилиндрического и плоского конденсаторов сохраняются. Формула $Q = CU$, которой мы пользовались, как определением, теперь стала формулой для частного случая, когда $Q_2 = -Q_1$. Если мы все-таки захотим дать новое определение взаимной емкости, то вот оно: $C = \frac{Q_1 - Q_2}{2U}$.

Формулы, приведенные выше, мы получили в предположении, что заряды распределены – каждый по своей поверхности – равномерно. Но для того чтобы поле в металле было равно нулю, это не необходимо. Достаточно, чтобы заряды было распределены одинаково на паре поверхностей 1в и 2н, т.е. внешних, а также на паре 1н и 2в, т.е. внутренних. На внутренних поверхностях заряды действительно распределены равномерно, а на внешних поверхностях, как показано, например, в статье А.Черноуцана «Распределение заряда в тонком диске» в «Кванте» №1 за 1998 год, распределение будет неоднородным. При этом потенциал в центре дисковых пластин будет равен $\frac{Q}{8\varepsilon\varepsilon_0 R}$, где Q в нашем случае равно $Q_1 + Q_2$, а R – радиус диска. Отсюда энергия внешнего поля будет равна

$$W_{\text{внеш}} = \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{16\varepsilon\varepsilon_0 R}.$$

Сравним эту энергию с энергией поля внутри конденсатора

$$W_{\text{внутр}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 V E^2}{2},$$

где V – объем, E – напряженность поля. После преобразований получаем

$$W_{\text{внутр}} = \frac{(Q_1 - Q_2)^2}{8C},$$

что для обычной ситуации $Q_2 = -Q_1$ дает, естественно, обычное выражение для энергии конденсатора $W = \frac{Q^2}{2C}$. Далее, выражая $W_{\text{внутр}}$ для диска, получаем

$$W_{\text{внутр}} = \frac{(Q_1 - Q_2)^2 d}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2},$$

где d – расстояние между пластинами. Как и следовало ожидать, внутренняя энергия из-за множителя d/R оказалась много меньше внешней, кроме области, где сумма $Q_1 + Q_2$ близка к нулю, т.е. конденсатор заряжен «почти правильно».

А теперь вопрос: почему все-таки было принято определение емкости $C = Q/U$, явно опирающееся на условие $Q_1 = -Q_2$? Причина проста – в технике: если мы куда-то доставляем заряд, его откуда-то берут, причем не издалека, не с другого конца города. Батарея или аккумулятор берет электроны с того, к чему присоединен ее «минус», и переносит их к тому, к чему присоединен ее «плюс». А при этом автоматически соблюдается наше условие.

Но вот на экстрасолнечной планете Незнаюкакойномер, открытой час назад, все сложилось иначе. Там нет гальванических источников и проводов, но зато есть природные источники зарядов, положительных и отрицательных. Они растут на деревьях, причем положительные и отрицательные – на разных, поэтому ветки стоят дыбом, как иголки у готовящегося к обороне ежа. А в любви там объясняются посредством фразы «ветви моего дерева тянутся к ветвям твоего». Собранные с веток заряды там носят и возят в кульках, электротехника там вся электростатическая и определение емкости там такое, как мы придумали. А ситуация $Q_1 = -Q_2$ – у них это жалкий частный случай, никому особо не интересный. Месяц назад, кстати, они открыли электрофорную машину! Так что прогресс у них теперь сильно ускорится.

Технические проблемы

Такие проблемы тоже рано или поздно упираются в физику, просто это не всегда сразу видно. Поэтому об этих проблемах иногда удается рассказать «на пальцах», но решать их всерьез бывает сложно. Хотя бы потому, что одна техническая проблема может включать в себя несколько теоретических. Но для начала вопрос: зачем вообще нужны конденсаторы?

У вас в кармане, скорее всего, имеется несколько сотен конденсаторов. Посмотрите на рисунок 5 – везде, где стоит буковка «C», там конденсатор. Что делают все эти «C»? Накапливают энергию, фильтруют сигнал, интегрируют и дифференцируют, сдвигают фазу. Энергия, накопленная в конденсаторе, используется, например, в фотоаппаратах, смартфонах и в некоторых моделях сотовых телефонов. В фотоаппаратах и смартфонах она преобразуется в энергию вспышки света, а в телефоне – иногда потребляется передатчиком. Но и в фотоаппарате, и в телефоне энергия, вообще-то, хранится в аккумуляторе, зачем же перекачивать энергию из аккумулятора в конденсатор? Ответ: внутреннее сопротивление аккумулятора ограничивает максимальный ток, а фотоаппарату для работы вспышки и телефону при поиске соты нужен ток побольше. У конденсатора, в смысле большого токоотбора, тоже есть два ограничения – сопротивление и индуктивность. Сопротивление ограничивает ток согласно закону Ома,

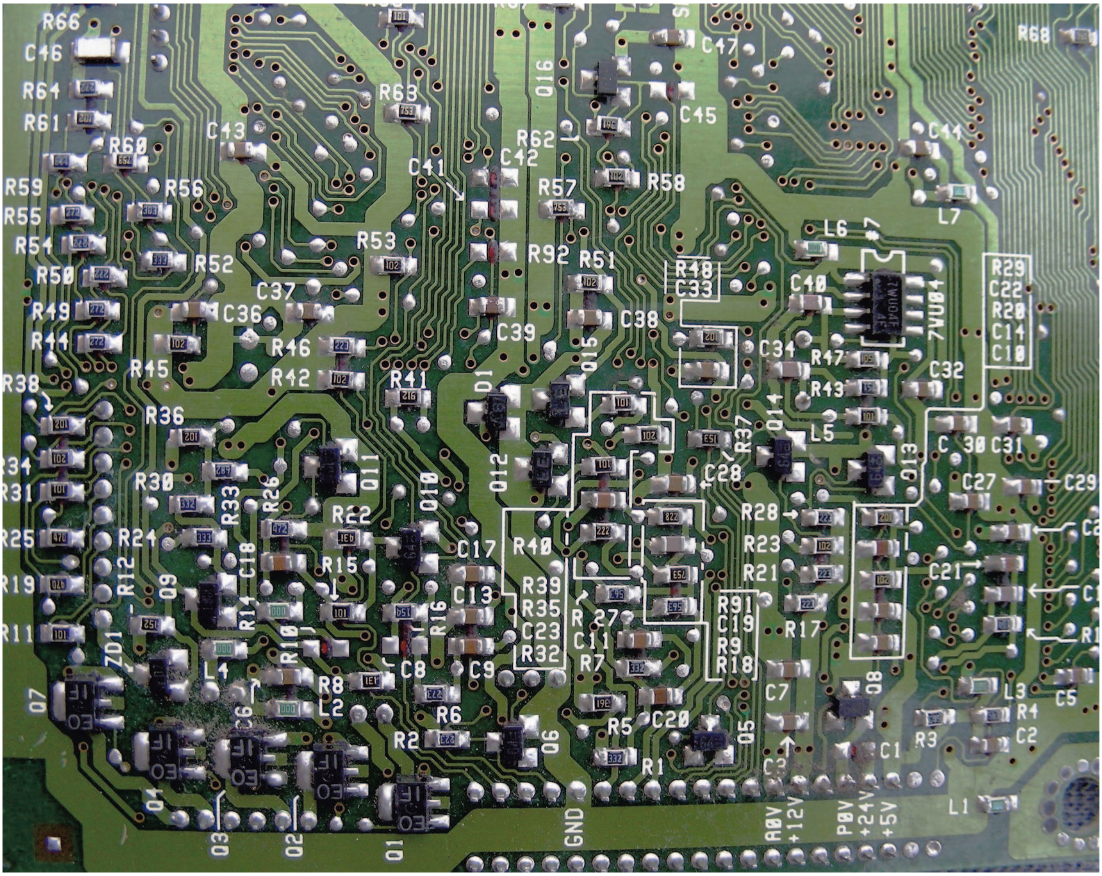


Рис. 5. Печатная плата (R – сопротивления)

а индуктивность образует вместе с емкостью колебательный контур. По формуле Томсона можно определить период колебаний, а если считать, что весь заряд протечет за первую половину периода, то можно определить ограничение на ток. Причем сопротивление и индуктивность есть не только у выводов конденсатора, они есть у самих обкладок.

Что касается фильтрации сигнала, то, если прикладывать к конденсатору обычное переменное (синусоидальное) напряжение одинаковой амплитуды, но разных частот, протекающий ток будет уменьшаться пропорционально частоте. Поэтому конденсатор может применяться для фильтрации, разделения сигналов – как сам по себе, так и в составе специальных схем, называемых фильтрами (рис. 6). Конденсатор, соединяющий провода (он обозначен С1), и конденсаторы, соединяющие провода с корпусом всего устройства (обозначены С2), пропускают через себя высокочастотную помеху, не давая ей проникнуть через фильтр.

Про интегрирование и дифференцирование сигнала в школе говорится не всегда, но понять это просто. Если вы знаете математическое определение, то сами сообразите, что заряд конденсатора, а значит и напряжение на нем, – это интеграл от тока по времени, а ток, соответственно, – производная от заряда и напряжения. Если на конденсатор подано синусоидальное напряжение, то протекающий в проводах синусоидальный же ток оказывается сдвинутым относительно напряжения на четверть периода (на $\pi/2$) назад.

Заметим, что эти же функции может выполнять катушка индуктивности. Прав-

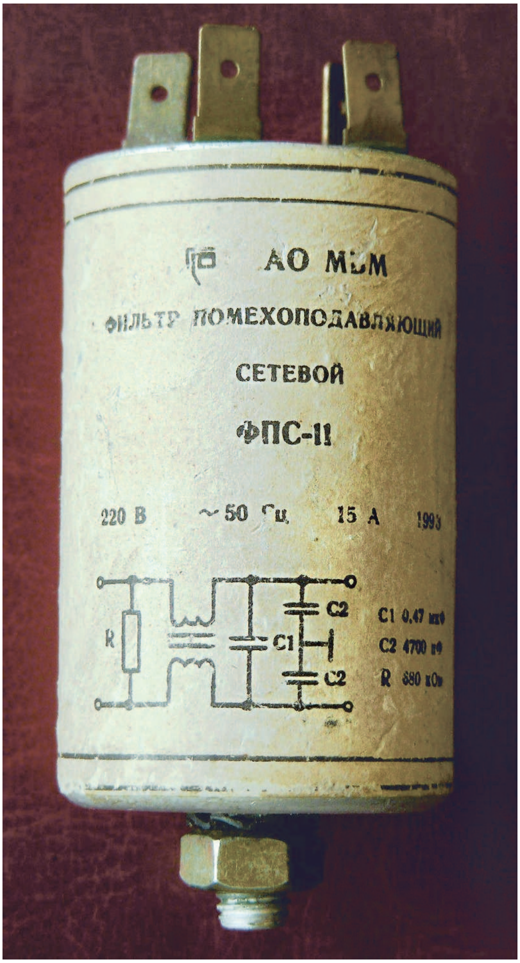


Рис. 6. Фильтр с изображенной на нем схемой

да, запасать в ней энергию хуже, чем в конденсаторе, поскольку из-за сопротивления проводов энергия будет быстро переходить в тепло. В сверхпроводящем соленоиде этих потерь нет, но есть расход энергии на охлаждение. Как элементы фильтров и резонансных контуров, катушки индуктивности используются наряду с конденсаторами. Напряжение на индуктивности пропорционально производной от тока, и фазу синусоидального сигнала она сдвигает, но по отношению к конденсатору в противоположном направлении – ток не отстает от напряжения, а опережает его.

Выше уже говорилось, что у конденсатора в смысле возможности большого токоотбора есть два ограничения. Первое (тривиальное) – сопротивление подводящих проводов и самих обкладок. Причем сопротивление обкладок тем больше, чем они тоньше, а с точки зрения увеличения емкости при заданном объеме (уменьшение объема и веса – постоянная задача и забота) их имеет смысл делать как раз тоньше. Здесь, как это обычно и бывает в технике, параметры изделия оказываются связаны, поэтому изо всех сил улучшая один, мы ухудшаем другой. Так что не бывает просто наилучших параметров или изделий, для разных задач лучшими оказываются разные.

Второе ограничение заметить труднее, потому что про сопротивление в школе говорится часто, а про индуктивность – редко. Между тем, у всякого проводника есть не только емкость, но и индуктивность. Это означает, что при протекании по нему тока возникает магнитное поле с энергией $LI^2/2$, а при изменении тока из-за изменения обусловленного им магнитного поля возникает ЭДС, равная LdI/dt (или, если вам так проще, $L\Delta I/\Delta t$, когда ток, а вместе с ним и поле, растет равномерно и изменяется на ΔI за время Δt). То, что у проводника есть емкость и индуктивность, означает, что он сам является резонансным контуром, настроенным на соответствующую частоту, и ток через него не может существенно измениться за время, много меньшее периода колебаний. Поэтому, если мы хотим разрядить конденсатор за весьма короткое время, а в физике и технике эта задача возникает часто, применяют специальные безындукционные конденсаторы – с уменьшенной, по возможности, индуктивностью.

Кстати, слова «конденсатор» и «емкость», слова «резистор» и «сопротивление», а также слова «катушка» и «индуктивность» часто употребляют как синонимы. (Забредете на радиотехнический, радиолюбительский и подобные форумы – не пугайтесь.) Хотя, конечно, конденсатор, резистор и катушка – это устройства, а емкость, сопротивление и индуктивность – физические параметры этих устройств: «емкость конденсатора 1 мкФ», «сопротивление резистора 1 кОм» и т.д.

Емкость – это, можно сказать, главный параметр конденсатора. Главным его можно назвать потому, что он почти всегда должен иметь определенное значение (иногда в фильтрах – «не менее такого-то»). Второй после емкости важный для практики параметр конденсатора – рабочее напряжение. Оно обычно должно быть «не менее такого-то». Это видно из формулы для энергии, а в случаях «неэнергетических» применений оно просто определяет возможность использования того или иного конденсатора – при большем напряжении он выйдет из строя. Максимальное напряжение определяется пробоем изоляции, т.е. ее разрушением, формально – превращением из изолятора в проводник. Физические процессы, развивающиеся при этом, многочисленны и замысловато переплетены. Познакомиться с ними можно, например, в книге «Рекорды и пределы, или Введение в экстремальное материаловедение» (Библиотечка «Квант», выпуск 136) и в статье «Что такое электрический пробой» (журнал «Квант», 1984, № 8).

Вспомним некоторые из этих процессов. Например, ударную ионизацию, когда электрон, разогнанный электрическим полем, при столкновении с атомом передает ему достаточно энергии для ионизации. Понятно, что происходит дальше? Где был электрон, стало два, где было два – там стало четыре, где четыре, потом восемь... При этом часть электрической энергии превращается в тепло, и несчастный диэлектрик – между прочим, оксид алюминия, который плавится при двух с небольшим тысячах градусов, а кипит при трех тысячах – превращается в пар с таким давлением, что разрывает изнутри конденсатор (рис. 7). Повезет, если никто не

Рис. 7. Высоковольтный конденсатор после пробоя

Рис. 8. Конденсаторы, на которых указан срок службы при разных напряжениях

окажется на пути разлетающихся осколков. Впрочем, если и не доводить дело до пробоя, то срок службы (а увеличение срока службы – постоянная задача и забота) конденсатора оказывается существенно зависящим от напряжения, при котором он работает (рис. 8). Значит, происходят в нем по-тихому какие-то процессы (о которых рассказано в упомянутой книжке).

У любого реального диэлектрика есть проводимость, его сопротивление не бесконечно. Тогда возникает вопрос – чем отличается диэлектрик от полупроводника? В школе обычно металлы и полупроводники различают по тому, растет или падает сопротивление с нагревом, а про диэлектрики вопрос не возникает потому, что их сопротивление считается бесконечным. А как нам теперь отличать диэлектрик от полупроводника, если у обоих при нагреве сопротивление падает? Вообще говоря, различие условно. Так, иногда пишут, что к диэлектрикам относят вещества с удельным сопротивлением более 10^8 Ом · м или шириной запрещенной зоны более 3 эВ. На практике к полупроводникам обычно относят пять элементов: B, Si, Ge, Se, Te и многие соединения, ориентируясь в основном на применение. В некоторых старых книжках список элементарных полупроводников был больше, но потом возник термин «полуметаллы» и как Плутон, не спросив его согласия, перевели из планет в карликовые планеты, так некоторые полупроводники перевели в полуметаллы. Сейчас, кроме перечисленных выше, среди элементов полупроводниками считают одну из модификаций фосфора (черный фосфор) и одну из модификаций олова (серое олово).

Применение того или иного материала зависит не от названия, а от его свойств и условий использования. Например, если сама среда или устройство очень низкоомно, то в качестве изолятора может применяться и вещество, которое обычно в качестве изолятора не воспринимают. Так, в генераторах коротких мощных импульсов для изоляции может применяться вода, которую обычно считают проводником. Но все-таки из нее удаляют часть примесей – для увеличения сопротивления.

Если у конденсатора есть проводимость и к нему приложено напряжение, в нем будет выделяться тепло. Его надо отводить, иначе конденсатор начнет греться, при этом сопротивление изоляции будет падать, ток еще более нарастать, тепловыделение – тоже, и в некоторых условиях начинается лавинный их рост. Это механизм так называемого электротеплового пробоя.

Однако не будем подавать на конденсатор слишком большое постоянное напряжение, а подадим не него допустимое напряжение, но переменное. Мы обнаружим, что конденсатор греется, причем нагрев зависит от частоты – с ее уменьшением нагрев уменьшается. Оказывается, есть какой-то фактор, зависящий от частоты, и его называют «диэлектрические потери». Нагрев из-за диэлектрических потерь используется и в промышленности, и в быту – это именно он греет еду в СВЧ-печи или «микроволновке». Их механизм на элементарном уровне прост – переменное электрическое поле «дергает» ионы, происходит преобразование энергии электромагнитного поля в механическую энергию молекул, а она через соударения передается другим молекулам – и объект нагревается. Если частота и амплитуда переменного поля таковы, что конденсатор может заметно нагреться, эффект приходится учитывать. На рисунке 9 показан конденсатор, на котором обозначена предельная мощность (0,3 кВт) – она может в нем переходить в тепло без риска вывести прибор из строя.

Рис. 9. Конденсатор, на котором указана максимальная рассеиваемая мощность

Теорема Месснера

Н.ПАНЮНИН

Речь пойдет о теореме, открытой немецким математиком Альфредом Месснером. Мы разберем саму теорему, ее возможные обобщения, а также различные подходы к доказательству. Теорему, пожалуй, нельзя назвать глубокой, однако она настолько неожиданна, что ее иногда называют «Moessner's magic».

Начнем с последовательности натуральных чисел. Выпишем ее в строчку и на первом шаге вычеркнем каждое n-е число. Во вторую строчку выпишем последовательность частичных сумм первой последовательности, не учитывая уже вычеркнутые числа. Теперь вычеркнем каждое $(n-1)$-е число. В третью строчку выпишем последовательность частичных сумм второй последовательности, снова не учитывая зачеркнутые числа. И так далее… Теорема Месснера утверждает, что в n-й строке будет написана последовательность 1^n, 2^n, 3^n…

Например, для случая $n = 3$ описанный процесс можно проиллюстрировать так (рис. 1):

1	2	~~3~~	4	5	~~6~~	7	8	~~9~~	10	11	~~12~~	13	…..
1	~~3~~		7	~~12~~		19	~~27~~		37	~~48~~		61	…..
1			8			27			64			125	…..

Рис. 1

Построение конструкции, описанной в теореме, подсказывает метод доказательства – метод математической индукции. Мы, однако, опишем два других подхода к доказательству, которые кажутся нам более наглядными и поучительными. Впрочем, и наши подходы используют индуктивные построения.

Первый подход – комбинаторный.

Для начала обратим внимание на несложный факт из теории графов. Пусть G – ориентированный граф, а A и B – две его вершины. Пусть также H – ориентированный граф, полученный из G обращением ребер графа G. Тогда число путей из A в B в графе G равно числу путей из B в A в графе H. Действительно, каждому пути из A в B в первом графе соответствует путь из B в A во втором графе, если идти в обратном направлении.

Сопоставим конструкции Месснера граф. Но сначала добавим строку из единиц к исходной конструкции. Вычеркнем каждое $(n+1)$-е число. Тогда последовательность частичных сумм оставшейся последовательности из единиц даст последовательность натуральных чисел. Это будет нулевой шаг алгоритма Месснера.

Для $n = 3$ получим (рис. 2):

1	1	1	~~1~~	1	1	1	~~1~~	1	1	1	~~1~~	1	1	1	~~1~~	1
1	2	~~3~~		4	5	~~6~~		7	8	~~9~~		10	11	~~12~~		13
1	~~3~~			7	~~12~~			19	~~27~~			37	~~48~~			61
1				8				27				64				125

Рис. 2

Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют членам последовательностей, ребрами соединим соседние в столбцах и строках вершины. Направление горизонтальных ребер зададим слева направо, вертикальных – сверху вниз. Вид полученного графа показан на рисунке 3.

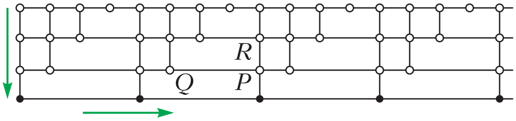


Рис. 3

Сейчас мы увидим, что сумма, соответствующая каждой вершине, связана с числом путей, которыми можно попасть в эту вершину из самой верхней самой левой вершины.

Действительно, в вершину P графа (см. рис. 3) можно попасть либо через вершину Q, либо через вершину R. Значит, число

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220902

путей в P равно сумме числа путей в Q и числа путей в R. Но ведь именно так и образовывались частичные суммы. Таким образом, число, стоящее в той или иной вершине, равно числу путей, соединяющих эту вершину с самой левой самой верхней. Остается вычислить эти числа.

Для подсчета числа путей рассмотрим обращенный граф. Разберем сначала частный случай для $n = 3$ (рис. 4).

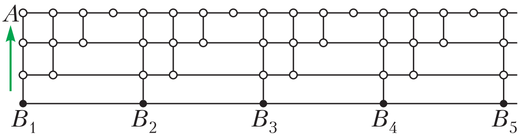


Рис. 4

Прямым подсчетом найдем число путей из B_5 в A, постепенно вычисляя число путей из B_5 в каждую из вершин. Результат показан на рисунке 5.

125	100	80	64	64	48	36	27	27	18	12	8	8	4	2	1	1
25	20	16		16	12	9		9	6	4		4	2	1		1
5	4			4	3			3	2			2	1			1
1				1				1				1				1

Рис. 5

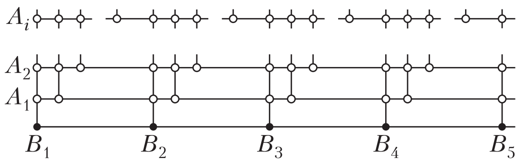


Рис. 6

В общем случае граф будет иметь структуру, показанную на рисунке 6.

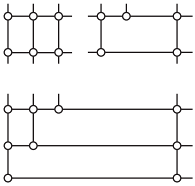


Рис. 7

Рассмотрим «треугольный» фрагмент этого графа, чтобы разобраться, как он заполняется (рис. 7).

Покажем, что если в правом вертикальном столбце вершин стоят степени числа a: $1, a^1, a^2, a^3, \ldots$, то в левом вертикальном столбце стоят числа $1, b^1, b^2, b^3, \ldots$, где $b = a + 1$.

Сделаем это индукцией по номеру строки. Первой строкой будем считать самую нижнюю. Числа заполняют граф справа-налево снизу-вверх. Если в i-й снизу строке стоят числа (справа налево) $a^i, a^i, a^{i-1}b^1, \ldots$ …, a^1b^{i-1}, b^i, тогда в следующей строке стоят числа $a^{i+1}, a^{i+1}, a^{i+1} + a^i = a^ib^1, a^{i-1}b^1 + a^ib^1 = a^{i-1}b^2, \ldots, a^1b^{i-1} + a^2b^{i-1} = a^1b^i$, $b^i + a^1b^i = b^{i+1}$. Заполнив все строки треугольного фрагмента, придем к рисунку 8.

b^i	ab^{i-1}	a^2b^{i-2}	…	$a^{i-1}b$	a^i	a^i
b^{i-1}	ab^{i-2}	a^2b^{i-3}	…	a^{i-1}		a^{i-1}
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
b^2	ab	a^2				a^2
b	a					a
1						1

Рис. 8

Остается заметить, что правый столбец самого правого фрагмента состоит из одних единиц: действительно, в каждую из вершин этого столбца можно попасть единственным образом. Тем самым, число способов пройти из вершины B_k в случае, когда граф состоит из $n + 1$ строки, равно k^n. А значит, в нижней строке алгоритма Месснера будут стоять степени 1^n, $2^n, \ldots, k^n, \ldots$, что и требовалось доказать.

Сложно сказать, как Альфред Месснер пришел к этой замечательной конструкции. Быть может, он пытался обобщить хорошо известный факт:

$$1 + 3 + \cdots + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Действительно, последнее равенство является частным случаем теоремы Месснера для $n = 2$.

Попробуем обобщить теперь уже теорему Месснера. Начнем с последовательности единиц. Снова мы будем что-то вычеркивать, а затем образовывать последовательности частичных сумм. Изменим правило вычеркивания. Первый член последовательности будет оставаться невычеркнутым, второй вычеркиваем, затем оставляем два невычеркнутых, потом снова вычеркиваем и т.д. Получится рисунок 9. Попробуйте построить соответствующий граф и с помощью подсчета количества путей понять, что за последовательность получается в итоге!

А мы приведем другой подход к решению этой задачи. Для того чтобы облегчить понимание дальнейшего, предлагаем читателю ознакомиться со статьями [1], [2].

1	~~1~~	1	1	~~1~~	1	1	1	~~1~~	1	1	1	1	~~1~~	1	1	1	1	1	~~1~~
1		2	~~3~~		4	5	~~6~~		7	8	9	~~10~~		11	12	13	14	~~15~~	
		2			6	~~11~~			18	26	~~35~~			46	58	71	~~85~~		
					6				24	~~50~~				96	154	~~225~~			
									24					120	~~274~~				
														120					

Рис. 9

A^0_{11}	A^0_{12}	A^0_{21}	A^0_{22}	A^0_{23}	A^0_{31}	A^0_{32}	A^0_{33}	A^0_{34}	A^0_{41}	A^0_{42}	A^0_{43}	A^0_{44}	A^0_{45}	A^0_{51}	A^0_{52}	A^0_{53}	A^0_{54}	A^0_{55}	A^0_{56}
A^1_{11}		A^1_{21}	A^1_{22}		A^1_{31}	A^1_{32}	A^1_{33}		A^1_{41}	A^1_{42}	A^1_{43}	A^1_{44}		A^1_{51}	A^1_{52}	A^1_{53}	A^1_{54}	A^1_{55}	
		A^2_{21}			A^2_{31}	A^2_{32}			A^2_{1}	A^2_{42}	A^2_{43}			A^2_{51}	A^2_{52}	A^2_{53}	A^2_{54}		
					A^3_{31}				A^3_{41}	A^3_{42}				A^3_{51}	A^3_{52}	A^3_{53}			
									A^4_{41}					A^4_{51}	A^4_{52}				
														A^5_{51}					

Рис. 10

Введем обозначения. Обратим внимание на треугольную структуру на рисунке 9. Число, стоящее в k-м треугольнике в n-й строке в столбце с номером i, обозначим A^n_{ki}. Например, $A^2_{32} = 11$, а $A^3_{53} = 225$. Тогда из рисунка 9 получится рисунок 10.

При исследовании числовых треугольников довольно частым и естественным методом является рассмотрение последовательностей по строкам треугольников. Следуя этому, надо рассматривать последовательности чисел в треугольниках, идущие по направлению «с северо-востока на юго-запад».

В третьем треугольнике можно увидеть четверку «6, 11, 6, 1», которая является визитной карточкой чисел Стирлинга первого рода (точно так же, как четверка «1, 7, 6, 1» сигнализирует о числах Стирлинга второго рода, а числа «1, 4, 6, 4, 1» – о вероятном появлении биномиальных коэффициентов). Если же последовательность, с которой вы начинаете работу, кажется незнакомой, обратитесь за помощью к онлайн-энциклопедии http://oeis.org/ (см. [3]). Попробуйте ввести в поисковую строку энциклопедии последовательность «120, 274, 225, 85, 15, 1» из пятого треугольника. Вы получите много полезной информации об этой на первый взгляд незнакомой последовательности!

Числа Стирлинга первого рода $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ $(0 \le k \le n)$ можно определить как коэффициенты в разложении многочлена $x(x+1)\ldots(x+n-1)$ по степеням x:

$$x(x+1)\ldots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Это подсказывает, что задачу можно решить методом производящих функций (см. [2]). Каждой последовательности, идущей с северо-востока на юго-запад в каждом из треугольников, сопоставим производящую функцию. Для этого введем двупараметрическое семейство функций

$$F_{kc}(x) = (1+x)^{c-1-k}(1+x)(1+2x)\ldots(1+kx) =$$

$$= (1+x)^{c-1-k}\prod_{i=1}^{k}(1+ix), \quad (1)$$

здесь $k = 1, 2, \ldots, c = 1, \ldots, k+1$. В частности,

$$F_{k,k+1}(x) = \prod_{i=1}^{k}(1+ix),$$

поэтому $F_{kc}(x)$ можно записать в виде

$$F_{kc}(x) = \frac{\prod_{i=1}^{k}(1+ix)}{(1+x)^{k+1-c}} = \frac{F_{k,k+1}(x)}{(1+x)^{k+1-c}}. \quad (2)$$

Например,

$$F_{56}(x) = (1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)(1+5x),$$

а

$$F_{53}(x) = \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)(1+5x)}{(1+x)^3}.$$

Представим $F_{kc}(x)$ в виде степенного ряда:

$$F_{kc}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} B^i_{k,c-i}x^i. \quad (3)$$

Это можно сделать, разложив $\frac{1}{1+x}$ по формуле для геометрической прогрессии, а затем возвести полученный ряд в нужную степень и умножить на числитель.

Замечание. Предложенный способ получения ряда для $F_{kc}(x)$, конечно, нужно обосновывать. Например, нужно обосновывать возведение ряда в степень, а также то, почему и где этот ряд будет сходиться к функции $F_{kc}(x)$. Не вдаваясь в подробности, заметим, что ряды к $F_{kc}(x)$ сходятся при $|x| < 1$ и описанные операции корректны.

Докажем, что

$$B_{kj}^{i} = A_{kj}^{i} \qquad (4)$$

для любого k и для любых $i \geq 0$, $j \geq 1$ таких, что $i + j \leq k + 1$. Как это сделать? Вспомним, что числа в таблице появлялись по определенным правилам, связанным с вычеркиванием и вычислением частичных сумм. Формально эти правила можно записать так.

Для $k = 1, 2, \ldots$ и $i = 0$, $j \leq k + 1$

$$A_{kj}^{i} = 1. \qquad (5)$$

Для $k = 1, 2, \ldots$ и для $i, j \geq 1$ таких, что $i + j \leq k + 1$,

$$A_{k,j+1}^{i} = A_{kj}^{i} + A_{k,j+1}^{i-1}, \qquad (6)$$

$$A_{k+1,1}^{i} = A_{k,k-j+1}^{i} + A_{k+1,1}^{i-1}. \qquad (7)$$

Покажем, что и B_{kj}^{i} удовлетворяют этим правилам.

Первое правило следует из того, что

$$B_{kj}^{0} = F_{kj}(0) = 1.$$

Для получения второго правила рассмотрим равенство

$$F_{k,c+1}(x) = F_{kc}(x)(1 + x),$$

которое получается непосредственно из определения функций F_{kc}. Представляя левую и правую части этого равенства рядами и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим требуемое (6).

Чтобы получить третье правило, придется немного повозиться с рядами. Итак, нужно выразить коэффициент, стоящий в $(k + 1)$-м треугольнике, через коэффициенты в k-м треугольнике. Для этого рассмотрим цепочку равенств:

$$F_{k+1,c}(x) = \frac{F_{k+1,k+2}(x)}{(1+x)^{k+2-c}} = \frac{(1+x)^{k+1} F_{k,k+1}\left(\frac{x}{1+x}\right)}{(1+x)^{k+2-c}} = \frac{F_{k,k+1}\left(\frac{x}{1+x}\right)}{(1+x)^{1-c}} = (1+x)^{c-1} F_{k,k+1}\left(\frac{x}{1+x}\right). \qquad (8)$$

Первое равенство в этой выкладке следует из (2), проверку второго оставляем читателю в качестве не очень сложного упражнения, остальные равенства почти очевидны.

Посмотрим на равенство правой и левой частей (8) как на равенство рядов, представляющих соответствующие функции. Коэффициенты при равных степенях x в обеих частях должны быть равны. Рассмотрим коэффициенты при x^{c-1}. В левой части этот коэффициент (как следует из определения (3)) равен $B_{k+1,1}^{c-1}$. Найдем коэффициент в правой части:

$$(1+x)^{c-1} F_{k,k+1}\left(\frac{x}{1+x}\right) = (1+x)^{c-1} \sum_{i=0}^{\infty} B_{k,k+1-i}^{i} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{i} = \sum_{i=0}^{c-1} B_{k,k+1-i}^{i} (1+x)^{c-1-i} x^{i} + x^{c-1} \sum_{i=1}^{\infty} B_{k,c-1+i}^{i} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{i}. \qquad (9)$$

Рассмотрим правую часть (9). Вклад в коэффициент при x^{c-1} может дать только первая сумма, поскольку перед второй уже стоит x^{c-1} и в ней будут только степени выше $c - 1$. Из первой суммы получим, что коэффициент при x^{c-1} равен $\sum_{i=0}^{c-1} B_{k,k-i+1}^{i}$.

Приравнивая коэффициенты при x^{c-1}, получим

$$B_{k+1,1}^{c-1} = \sum_{i=0}^{c-1} B_{k,k-i+1}^{i} .$$

Тогда

$$B_{k+1,1}^{c} - B_{k+1,1}^{c-1} = B_{k,k-c+1}^{c}.$$

Таким образом, и третье правило проверено. А значит, равенство (4) доказано.

Теперь остается заметить, что B_{k1}^k совпадает с коэффициентом при x^k в разложении функции

$$F_{k,k+1}(x) = \prod_{i=1}^{k}(1+ix) = (1+x)\ldots(1+kx)$$

по степеням x. Несложно проверить, что этот коэффициент равен $k!$. И мы видим, что последовательность на рисунке 9 – это последовательность факториалов.

В заключение заметим, что Месснер не нашел доказательства своей теоремы. Однако нам кажется, что в данном случае важнее сам неожиданный и красивый результат. Интересно, кстати, что получен он по научным меркам относительно недавно – в 1951 году. Доказательства и обобщения же, как и показала история, появились в больших количествах.

Литература

1. *Л.Курляндчик, А.Лисицкий.* Суммы и произведения. – «Квант», 1978, №10.

2. *С.Воронин, А.Кулагин.* Метод производящих функций. – «Квант», 1984, №5.

3. *А.Заболотский.* Плохие стрелки. – «Квант», 2022, №7.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 классов, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest

Желаем успеха!

1. Гарри Поттер поместил в толщу воды неподвижный ледяной кубик со стороной 1 см, после чего вся вода, находящаяся не дальше, чем на 1 см хоть от какой-то точки кубика, тоже замерзла. Докажите, что получившийся кусок льда можно разрезать на части и сложить из них всех несколько фигур, каждая из которых — кубик, цилиндр или шарик.

А.Канель-Белов

2. В вершинах куба расставили 8 чисел так, что на любых двух параллельных ребрах общая сумма чисел одна и та же. Сколько среди этих 8 чисел может быть различных? (Укажите все варианты, сколько различных чисел может быть, и докажите, что других вариантов нет.)

Ф.Нилов

3. В треугольнике ABC точка I_c – центр вневписанной окружности, касающейся отрезка AB. На сторонах AC и BC нашлись точки X и Y, делящие периметр треугольника ABC на две ломаные равной длины. Докажите, что описанная окружность треугольника CXY делит пополам отрезок CI_c.

П.Кожевников

4. Места в салоне расположены по два (А и Б) в n рядов. В очереди на посадку согласно

вход | коридор

1Б	2Б	3Б	4Б	…	…	…
1А	2А	3А	4А	…	…	…

купленным билетам стоят $2n$ пассажиров. Порядок людей в очереди назовем *удачным*, когда выполняются два условия:

– для каждого ряда человек с билетом на место А стоит в очереди раньше, чем человек с билетом на место Б,

– если у двух людей одинаковая буква места, то раньше стоит тот, у кого номер ряда больше.

Сколько существует удачных порядков людей в очереди? (При удачном порядке очередь в целом будет двигаться быстрее — меньше людей будут задерживать других пассажиров, пока кладут ручную кладь и т.д.)

Е.Бакаев

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2714–М2717, Ф2721–Ф2724

М2714. Даны многочлены f и g с целыми коэффициентами, причем у многочлена g старший коэффициент равен 1. Известно, что для бесконечно многих натуральных n число $f(n)$ делится на $g(n)$. Докажите, что $f(n)$ делится на $g(n)$ для всех натуральных n, при которых $g(n) \neq 0$.

Фольклор

М2715. На шахматной доске хромая ладья за ход может переходить в клетку, соседствующую по стороне с клеткой, в которой ладья находится. На доске 9×9 хромая ладья, начав с какой-то клетки, сделала n ходов, при этом она ни одну клетку не посетила дважды и не сделала два хода подряд в одном направлении. Каково наибольшее возможное значение n?

Фольклор

М2716. Найдите все пары натуральных чисел k, m такие, что для любого натурального n произведение $(n+m)(n+2m)\ldots$ $\ldots(n+km)$ делится на $k!$.

П.Кожевников

М2717*. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF, пересекающиеся в точке H; O – центр описанной окружности; касательные к окружности (ABC), проведенные в точках B и C, пересекаются в точке T (рис. 1). Пусть K и L симметричны точке O относительно AB и AC соответственно. Окружности (DFK) и (DEL) пересекаются в точке P, отличной от D. Докажите, что P, D, T лежат на одной прямой.

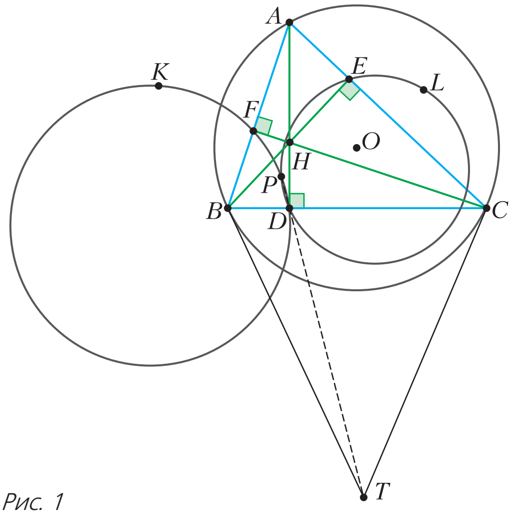


Рис. 1

Дон Луу (Вьетнам)

Ф2721. Экспериментатор Анатолий полетел с экспедицией на новую планету, пригодную для жизни. Из-за бессонницы Анатолий решил исследовать ускорение свободного падения на поверхности этой планеты и назвал эту величину «$ж$». Для изучения он взял три резинки с разными значениями коэффициента упругости, но одинаковой массы, равной $m = 20$ г. Он начал измерять зависимость высоты полета резинок от величины их растяжения, но по своей неопытности написал все значения в одну таблицу. Помогите Анатолию найти ускорение свободного падения $ж$ на

№	Δx, см	h, м	№	Δx, см	h, м	№	Δx, см	h, м
1	2,8	2,34	8	5,1	1,91	15	3,7	3,97
2	1,7	0,85	9	0,7	0,04	16	1,9	0,69
3	3,2	1,89	10	1,1	0,38	17	1,6	0,46
4	4,0	2,99	11	2,2	1,49	18	2,4	1,05
5	4,5	1,55	12	3,6	2,42	19	3,3	0,75
6	1,8	0,24	13	1,2	0,08	20	0,5	0,07
7	2,7	1,33	14	3,4	3,43	21	2,4	0,45

этой планете и коэффициенты упругости каждой резинки, если известно, что наименьший из них равен $k = 1$ Н/см, а также узнать, как высоко могла взлететь каждая резинка при растяжении на длину, равную $\Delta x = 7$ см. Все резинки подчиняются закону Гука.

А.Иванов

Ф2722. В сосуде при температуре 0 °С находятся жидкая вода и ее пар. Оцените количество ударов, которые за одну секунду испытывает одна молекула, находящаяся на поверхности воды, со стороны молекул, входящих в состав пара. Давление насыщенного пара при этой температуре равно 611 Па.

С.Ударов

Ф2723. С одним килограммом воды (H_2O) провели процесс, который состоит из двух участков. На первом участке при постоянном давлении $p = 10^5$ Па температура поднялась от 0 °С до 200 °С. На втором участке при постоянной температуре давление уменьшилось до 10^3 Па. Каково изменение внутренней энергии воды в этом процессе? Какую работу совершила вода, действуя на внешние тела на каждом из этих участков?

Д.Водный

Ф2724. В два сосуда кубической формы с размерами ребер $a = 1$ м и $2a$ заполнены доверху (каждый) чистой дистиллированной водой. В каждый из сосудов всыпали по 1 кг поваренной соли (NaCl) и хорошо перемешали. Две противоположные вертикальные стенки в каждом из сосудов металлические, а остальные стенки и оба дна сделаны из полиэтилена (изолятора). Собрали электрическую цепь (рис. 2), в которой эти сосуды соединены последовательно, и на короткое время (т.е за это время можно не учитывать теплообмен с окружением), замкнув ключ, подключили к источнику тока. В момент отключения от источника тока температура воды (соленой) в кубе меньшего размера оказалась на 1 градус выше температуры, которая была в момент подключения источни-

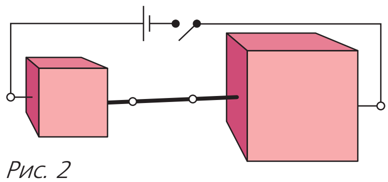


Рис. 2

ка. Какой была температура в другом сосуде в момент размыкания ключа? Теплоемкостью стенок сосудов в сравнении с теплоемкостью воды можно пренебречь.

С.Варламов

Решения задач М2702–М2705, Ф2709–Ф2712

М2702. *Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I, внешние биссектрисы его углов B и C пересекаются в точке J (рис. 1). Окружность ω_b с центром в точке O_b проходит через точку B и касается прямой CI в точке I. Окружность ω_c с центром в точке O_c проходит через точку C и касается прямой BI в точке I. Отрезки O_bO_c и IJ пересекаются в точке K. Найдите отношение IK/KJ.*

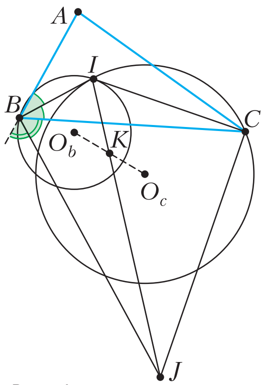


Рис. 1

Ответ: 1/3.

Проведем в окружности ω_b диаметр IX, а в окружности ω_c – диаметр IY (рис.2). Заметим, что $\angle IBJ = 90° = \angle ICJ$, поскольку внутренняя и внешняя биссектрисы угла перпендикулярны. Следовательно,

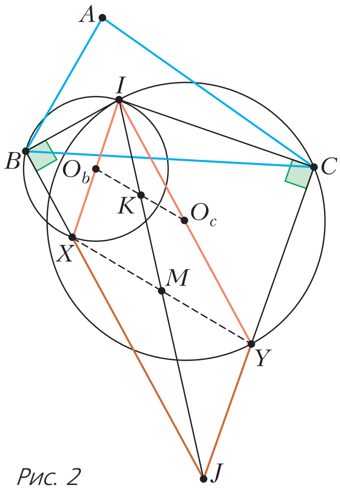


Рис. 2

точка X лежит на BJ, а точка Y – на CJ. Кроме того, $IX \perp IC$, поскольку ω_b касается IC в точке I, поэтому $IX \parallel CJ$. Аналогично, $IY \parallel BJ$. Итого, четырехугольник $IXJY$ – параллелограмм; пусть его диагонали пересекаются в точке M. Тогда $IM = MJ$, а отрезок O_bO_c – средняя линия треугольника IXY, поэтому точка K – середина отрезка IM. Таким образом, $IK = IM/2 = = IJ/4$, откуда следует, что $IK/KJ = 1/3$. Задача решена.

Существуют и другие подходы к решению. Пусть N – середина дуги BAC, а луч NI вторично пересекает окружность (ABC) в точке P. Счетом углов можно показать, что окружность (IBP) касается прямой CI в точке I, следовательно, это и есть окружность ω_b. Аналогично, окружность ω_c описана около треугольника IPC. Значит, IP – общая хорда окружностей ω_b и ω_c, а тогда O_bO_c – серединный перпендикуляр к отрезку IP. Поскольку к тому же $\angle IPM = 90°$ (так как середина M отрезка IJ является серединой дуги BC), мы получаем, что O_bO_c проходит через середину отрезка IM, а тогда $IK/KJ = 1/3$.

Л.Емельянов, И.Богданов

M2703. *Дана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$, в которой нет двух равных членов. Отрезок $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+m-1}$ этой последовательности назовем монотонным отрезком длины m, если выполнены неравенства $a_i < a_{i+1} < \ldots < a_{i+m-1}$ или неравенства $a_i > a_{i+1} > \ldots > a_{i+m-1}$. Оказалось, что для каждого натурального k член a_k содержится в некотором монотонном отрезке длины $k+1$. Докажите, что существует натуральное N такое, что последовательность $a_N, a_{N+1}, \ldots$ монотонна, т.е. $a_N < a_{N+1} < \ldots$ или $a_N > a_{N+1} > \ldots$*

Предположим противное. Не умаляя общности, можно считать, что $a_1 < a_2$ (иначе можно умножить все члены последовательности на -1). Поскольку последовательность $a_2, a_3, \ldots$ не является возрастающей, существует такое $k \ge 2$, что $a_k > a_{k+1}$. Так как последовательность $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$ не является убывающей, существует такое $l > k$, что $a_l < a_{l+1}$. Выберем наименьшее l, удовлетворяющее этим двум неравенствам. Тогда либо $l > k+1$, и, значит, $a_{l-1} > a_l$ согласно выбору l, либо $l = k+1$, и, значит, $a_{l-1} = a_k > a_{k+1} = a_l$. Итак, в любом случае $a_{l-1} > a_l$.

Рассмотрим монотонный отрезок длины l, содержащий a_{l-1}; он обязан содержать и a_l. Поскольку $a_{l-1} > a_l$, числа этого отрезка монотонно убывают. Значит, он не может содержать числа a_1 (иначе бы он содержал и $a_2 > a_1$). Но тогда, раз длина отрезка равна l, он обязан содержать и $a_{l+1} > a_l$, что невозможно.

А.Голованов

M2704. *Изначально на доске написана пара чисел $(1,1)$. Если для некоторых x и y на доске написана одна из пар $(x, y-1)$ и $(x+y, y+1)$, то можно дописать другую. Аналогично, если на доске написана одна из пар (x, xy) и $\left(\frac{1}{x}, y\right)$, то можно дописать другую. Докажите, что в каждой выписанной паре первое число будет положительным.*

Назовем *дискриминантом* пары чисел (a,b) величину $D(a,b) = b^2 - 4a$. Докажем, что дискриминант всех пар чисел, записанных на доске, всегда отрицателен. Действительно, дискриминант пары чисел, записанной изначально, равен $D(1,1) = -3 < 0$. Далее, верны следующие соотношения:

$$\frac{D(x, y-1)}{D(x+y, y+1)} = \frac{y^2 - 4x - 2y + 1}{y^2 - 4x - 2y + 1} = 1$$

и

$$\frac{D(x,xy)}{D(1/x,y)}=\frac{x^2y^2-4x}{y^2-4/x}=x^2,$$

поэтому на доске ни в какой момент не может появиться пара с положительным дискриминантом. Теперь рассмотрим любую выписанную на доску пару (a,b). В ней первое число a равно $\frac{b^2-D}{4}$ и, следовательно, больше нуля, что и требовалось доказать. Задача решена.

Заметим, что слово «дискриминант» в этом решении используется не просто так. Для каждой пары чисел (a,b), написанной на доске, посмотрим на квадратный трехчлен t^2-bt+a. Как ведут себя корни (возможно, комплексные) этого квадратного трехчлена при описанных заменах? Пусть t_1 и t_2 – корни трехчлена $t^2-(y-1)t+x$, т.е. $t_1+t_2=y-1$, $t_1t_2=x$; тогда $(t_1+1)+(t_2+1)=y+1$, а $(t_1+1)(t_2+1)=t_1t_2+t_1+t_2+1=x+y$, т.е. при первой операции корни соответствующего квадратного трехчлена или оба увеличиваются на 1, или оба уменьшаются на 1. Пусть t_1 и t_2 – корни трехчлена $t^2-xyt+x$, т.е. $t_1+t_2=xy$, $t_1t_2=x$; тогда $\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}=y$, $\frac{1}{t_1}\cdot\frac{1}{t_2}=\frac{1}{t_1t_2}=\frac{1}{x}$, т.е. при второй операции корни соответствующего квадратного трехчлена заменяются на обратные.

Заметим, что у квадратного трехчлена x^2-x+1, соответствующего паре $(1,1)$, оба корня не являются вещественными числами. При описанных операциях они не могут оба стать вещественными. Другими словами, ни для какой пары чисел, написанной на доске, соответствующий квадратный трехчлен не может иметь корней. Если же первое число в паре станет отрицательным, то у соответствующего квадратного трехчлена старший коэффициент равен 1, а свободный член отрицателен, т.е. у него оба корня вещественные.

М.Антипов

М2705*. *Дано натуральное число $n>4$. На плоскости отмечены n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Василий проводит по одному все отрезки, соединяющие пары отмеченных точек. На каждом шаге, проводя очередной отрезок S, Василий помечает его наименьшим натуральным числом, которым еще не помечен ни один отрезок, имеющий с S общий конец. Для какого наибольшего k Василий может действовать так, чтобы пометить какой-то отрезок числом k?*

Ответ: $k=2n-3$ при нечетном n и $k=2n-4$ при четном $n>4$.

Оценка. Рассмотрим шаг, на котором Василий помечает некоторый отрезок AB. Перед этим шагом из каждой из точек A и B выходит максимум по $n-2$ отрезка, и они содержат максимум $2n-4$ различных пометок. Значит, Василий точно сможет пометить этот отрезок числом, не превосходящим $2n-3$. Итак, $k\le 2n-3$.

Если n четно, эту оценку можно уточнить следующим образом. Назовем *маленьким* отрезок, помеченный единицей. Докажем, что в конце процесса из каждой точки будет выходить маленький отрезок; предположим противное. Точки, из которых выходят маленькие отрезки, разбиваются на пары точек, соединенных таким отрезком. Значит, есть хотя бы две точки X и Y, из которых не выходит маленьких отрезков. Получается, что, когда Василий проводил отрезок XY, он должен был пометить его единицей – противоречие.

Значит, если отрезок AB не будет маленьким, то в конце процесса среди отрезков, выходящих из A и B, кроме AB, будут два маленьких отрезка. Тогда на этих отрезках будет максимум $2(n-2)-1=2n-5$ различных пометок. Следовательно, когда Василий будет проводить отрезок AB, он сможет пометить его числом, не превосходящим $2n-4$, и $k\le 2n-4$.

Пример. Осталось доказать, что Василий может достичь указанных значений k.

Лемма. Если количество точек четно и равно m, то Василий может пометить все отрезки между этими точками, использовав лишь числа от 1 до $m-1$. При этом из каждой точки будут выходить отрезки, помеченные всеми этими числами.

Доказательство. Утверждение леммы не зависит от конкретного расположения точек, поэтому можно считать, что $m-1$ точек $A_1,\ldots,A_{m-1}$ расположены в вершинах правильного $(m-1)$-угольника, а оставшаяся точка – в его центре O.

Тогда все отрезки между этими точками можно разбить на $m-1$ множеств $S_1,S_2,\ldots,S_{m-1}$ так, чтобы отрезки одного множества не имели общих концов. Например, в множество S_i можно включить отрезок OA_i и все отрезки, соединяющие пары вершин $(m-1)$-угольника и перпендикулярные OA_i. Из каждой точки выходит по отрезку каждого из множеств.

Теперь Василий может сначала пометить все отрезки множества S_1 числом 1, затем все отрезки второго множества числом 2 и т.д. Лемма доказана.

Вернемся к решению. Пусть n нечетно, и пусть A – отмеченная точка. Пусть Василий сначала пометит все отрезки между точками, отличными от A, числами от 1 до $n-2$ согласно лемме. Затем он проведет все $n-1$ отрезков из A; каждый отрезок AB ему придется помечать числом, большим $n-2$, ибо из B уже выходят отрезки, помеченные всеми меньшими числами. Кроме того, все эти $n-1$ отрезков будут помечены разными числами, ибо у них есть общий конец. Следовательно, они будут помечены числами $n-1,n,\ldots,2n-3$, т.е. Василий получит пометку $k=2n-3$.

Пусть теперь n четно. Выберем две отмеченные точки A и B; пусть $C_1,C_2,\ldots,C_{n-2}$ – остальные отмеченные точки. Пусть Василий сначала пометит все отрезки между точками C_i числами от 1 до $n-3$ согласно лемме, а также пометит отрезок AB числом 1. Затем он последовательно проводит отрезки $AC_1,AC_2,\ldots,AC_{n-3}$; поскольку в вершины C_i уже входят отрезки с пометками от 1 до $n-3$, новые отрезки будут помечены числами $n-2,n-1,\ldots,2n-6$ соответственно. Далее Василий проводит отрезки $BC_{n-3},BC_2,BC_3,\ldots,BC_{n-4}$; аналогично, он пометит их числами $n-2,n-1,\ldots$ $\ldots,2n-6$ соответственно.

Теперь в вершины A и B уже входят отрезки со всеми пометками от $n-2$ до $2n-6$, а в вершину C_{n-2} – со всеми пометками от 1 до $n-3$. Значит, когда Василий проводит отрезки AC_{n-2} и BC_{n-2}, первый будет помечен числом $2n-5$, а второй – числом $2n-4$ (ибо имеет общий конец с предыдущим). Значит, Василий добился появления числа $k=2n-4$.

А.Глебов, Д.Храмцов

Ф2709.[1] *На горизонтальной поверхности покоится незакрепленная горка массой m с углом наклона одной грани к горизонту α (рис. 1). У основания горки на ее наклонной грани находится точечное тело массой m. В некоторый момент времени тело толкают вверх вдоль наклонной грани горки, и оно приобретает скорость v_0. Горка в этот момент имеет нулевую скорость. Известно, что тело не «переваливает» через верхушку горки, а после подъема возвращается обратно по наклонной грани. По какой траектории движется тело? Чему равна и как направлена скорость тела (относительно земли), когда оно возвращается на первоначальную высоту? Трение между всеми поверхностями отсутствует. Ответ обоснуйте.*

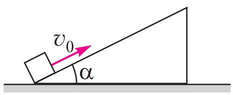


Рис. 1

Поскольку в процессе движения по горке на тело действуют постоянные силы – сила тяжести и сила реакции горки, его ускорение постоянно. Следовательно, движение тела равноускоренное, а так как векторы его начальной скорости и ускорения не параллельны друг другу, траектория тела – парабола.

Найдем характерные особенности траектории тела и его конечную скорость. На спуск и на подъем тело тратит одинаковое время t. Это время определяется начальной вертикальной составляющей скорости тела и вертикальной составляющей постоянного ускорения $a_в$: $t=\dfrac{v_0\sin\alpha}{a_в}$. Вертикальная составляющая скорости тела в момент спуска будет такой же по величине, но противоположно направленной вертикальной составляющей начальной ско-

---

[1] Автор решений задач Ф2709–Ф2712 – С.Муравьев.

рости тела: $v_{\text{к в}} = -v \sin\alpha$.

В верхней точке траектории у тела и у горки скорость одна и та же. А поскольку у них одинаковые массы, то по закону сохранения горизонтальной составляющей импульса системы тело–горка эта скорость равна половине горизонтальной составляющей начальной скорости тела. Поэтому изменение горизонтальной составляющей импульса тела до подъема на максимальную высоту равно половине горизонтальной составляющей начального импульса тела. И, следовательно, в момент возвращения тела на первоначальный горизонтальный уровень горизонтальная составляющая скорости тела будет равна нулю, т.е. в момент падения точечного (по условию) тела на горизонтальную поверхность его скорость вертикальна и равна по величине $v_0 \sin\alpha$.

Качественно траектория тела выглядит так, как показано на рисунке 2 (красный пунктир). Здесь сплошными линиями показа-

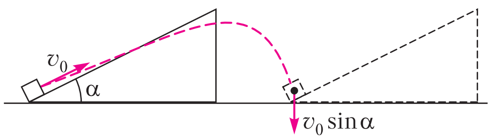


Рис. 2

ны положения тела и горки в начальный момент, черным пунктиром – положение тела и горки в момент съезжания тела с горки. Очевидно, что ось симметрии параболы, представляющей собой траекторию тела, будет параллельна вектору ускорения тела. Направление этого вектора можно найти из следующих соображений. Поскольку горизонтальная составляющая ускорения тела и ускорение горки создаются одной и той же силой реакции между телом и горкой, а массы тела и горки равны, то горизонтальная составляющая ускорения тела относительно земли $\vec{a}_{\text{г з}}$ и ускорение горки равны по величине (и противоположны по направлению). Поэтому в неинерциальной системе отсчета, связанной с горкой, горизонтальная составляющая ускорения тела $\vec{a}_{\text{г г}}$ будет в два раза больше горизонтальной составляющей ускорения тела в системе отсчета, связанной с землей. А поскольку в системе

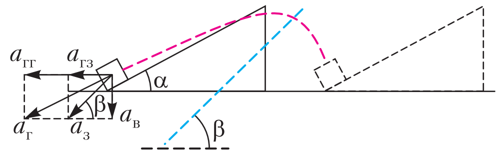


Рис. 3

отсчета, связанной с горкой, вектор ускорения тела $\vec{a}_{\text{г}}$ направлен вдоль поверхности горки, то вектор ускорения тела относительно земли $\vec{a}_{\text{з}}$ направлен под таким углом β к горизонту, что его тангенс вдвое больше тангенса угла наклона грани клина (рис. 3): $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$. Именно под таким углом к горизонту и направлена ось симметрии параболы, представляющей собой траекторию тела (ось симметрии параболы, параллельная вектору ускорения тела относительно земли, показана синим пунктиром).

Ф2710. *Тонкий однородный массивный стержень массой m и длиной 3l/2 подвешен на двух невесомых нерастяжимых нитях длинами l и 2l, которые прикреплены к концам стержня и к одной точке горизонтального потолка (рис. 1). Найдите силы натяжения нитей.*

На стержень действуют силы натяжения нитей $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ и сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная к центру стержня, поскольку он однородный (рис. 2). Условие моментов относительно центра стержня дает

$$T_1 \cdot \frac{3}{4} l \sin\alpha = T_2 \cdot \frac{3}{4} l \sin\beta,$$

где α и β – углы треугольника, образован-

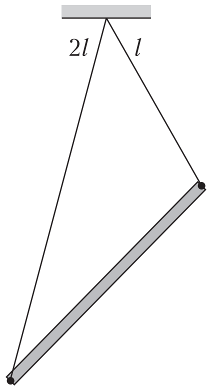


Рис. 1

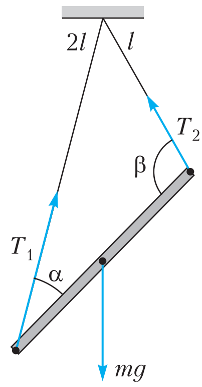


Рис. 2

ного нитями и стержнем, $3l/4$ – половина длины стержня. Отсюда получаем

$$\frac{T_1}{\sin\beta}=\frac{T_2}{\sin\alpha}.$$

По теореме синусов для треугольника, образованного нитями и стержнем, имеем

$$\frac{2l}{\sin\beta}=\frac{l}{\sin\alpha}.$$

Деля эти две формулы друг на друга, получим

$$\frac{T_1}{2l}=\frac{T_2}{l}.$$

Это означает, что сила натяжения нити пропорциональна ее длине и для сил натяжения справедливо соотношение

$$T_1=2T_2.$$

Используем теперь второе условие равновесия (уравнение сил). Поскольку

$$m\vec{g}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0,$$

то векторы сил натяжения и тяжести образуют треугольник (рис. 3), причем угол между силами $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ в этом треугольнике равен $\alpha+\beta$. Поэтому по теореме косинусов имеем

Рис. 3

$$m^2g^2=T_1^2+T_2^2-2T_1T_2\cos(\alpha+\beta).$$

Используя пропорциональность сил натяжения длинам нитей, получим

$$m^2g^2=T_2^2\left(5-4\cos(\alpha+\beta)\right).$$

А по теореме косинусов для треугольника, образованного нитями и стержнем, имеем

$$\left(\frac{3}{2}l\right)^2=4l^2+l^2-4l^2\cos\left(180^\circ-(\alpha+\beta)\right)=$$
$$=5l^2+4l^2\cos(\alpha+\beta).$$

Выражая отсюда $\cos(\alpha+\beta)$:

$$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{16},$$

находим силы натяжения нитей:

$$T_1=\frac{4}{\sqrt{31}}mg,\ T_2=\frac{2}{\sqrt{31}}mg.$$

Ф2711. *В цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находится идеальный газ. Объем газа V_0, абсолютная температура T_0, давление газа равно внешнему давлению p_0. Между поршнем и стенками сосуда действует сила трения. Газ в сосуде медленно нагревают, и при температуре $6T_0/5$ поршень начинает перемещаться. Газ нагревают до температуры $2T_0$, затем нагрев прекращают, и газ медленно остывает до первоначальной температуры. Постройте график зависимости объема газа от его температуры для указанного процесса и найдите объем и давление газа во всех состояниях, когда меняется характер процесса, происходящего с газом. Считайте, что максимальная сила трения между поршнем и стенками сосуда не зависит от их температуры.*

Поскольку до температуры $6T_0/5$ поршень остается на месте, с газом в это время происходит изохорический процесс. При температуре $6T_0/5$ давление газа становится равным $6p_0/5$ и разность сил, действующих на поршень со стороны газа и внешнего атмосферного воздуха, оказывается равной максимальной силе трения между поршнем и стенками (которая направлена вниз). Следовательно,

$$F_{\text{тр max}}=\frac{1}{5}p_0S.$$

Так как газ нагревают медленно, его давление в любой момент времени равно сумме внешнего давления и избыточного давления, созданного силой трения. А поскольку сила трения не зависит от температуры, процесс, происходящий с газом, – изобарический при давлении $6p_0/5$. Объем газа V_1 при температуре $2T_0$ можно найти по закону Гей-Люссака:

$$\frac{V_0}{6T_0/5}=\frac{V_1}{2T_0},\ \text{и}\ V_1=\frac{5}{3}V_0.$$

После того, как нагревание прекратили, поршень остановился, а газ начал охлаждаться. Но поршень не будет двигаться вниз до того момента, как разность сил, действующих на него со стороны внешнего воздуха и газа, не превысит максимальную силу трения (но направленную вверх). Поэтому с газом будет происходить изохорическое охлаждение при объеме V_1 до давления

$$p_1 = p_0 - \frac{1}{5}p_0 = \frac{4}{5}p_0.$$

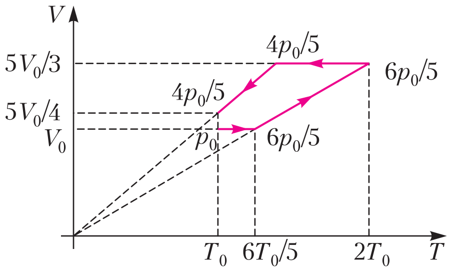
Температуру газа в этот момент можно найти по закону Шарля:

$$\frac{6p_0/5}{2T_0} = \frac{p_1}{T_1} = \frac{4p_0/5}{T_1}, \text{ и } T_1 = \frac{4}{3}T_0.$$

После достижения этой температуры давление газа станет равным p_1 и с газом будет проходить изобарическое охлаждение при этом давлении до температуры T_0. Объем газа V_2 в конечном состоянии можно найти по закону Гей-Люссака:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_0}, \text{ и } V_2 = \frac{5}{4}V_0.$$

График зависимости объема газа от его температуры с указанием характерных параметров газа при изменении характера процесса приведен на рисунке.



Ф2712. *Две частицы с одинаковыми массами m и зарядами q и $-q$ ($q > 0$) удерживают на расстоянии l друг от друга в однородном магнитном поле, которое перпендикулярно отрезку, соединяющему частицы (рис. 1). Частицы отпускают. При какой минимальной индукции магнитного поля B частицы не столкнутся? На какое минимальное расстояние в этом случае сблизятся частицы?*

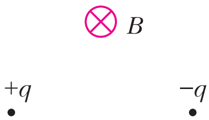


Рис. 1

Благодаря кулоновскому притяжению частицы будут сближаться и величины их скоростей будут расти. При этом действующая на частицы магнитная составляющая силы Лоренца будет поворачивать «вверх» скорости частиц. Чем сильнее сблизятся частицы и чем, соответственно, больше будут их скорости, тем больше будут магнитные составляющие сил Лоренца. Если магнитное поле очень сильное, то оно развернет скорости частиц параллельно друг другу, а затем начнет «отодвигать» их друг от друга, побеждая силу кулоновского притяжения. Для очень малого магнитного поля траектории частиц будут отклоняться от прямолинейных, но магнитное поле не сможет «победить» кулоновское притяжение. Это значит, что в случае, когда частицы не сталкиваются, будет реализовываться следующая ситуация: магнитное поле развернет частицы так, что их скорости будут параллельны друг другу, и в этом положении магнитная составляющая силы Лоренца будет компенсировать силу кулоновского притяжения.

Найдем минимальное расстояние, на которое сближаются частицы. Введем координатные оси x и y (рис. 2). Второй закон

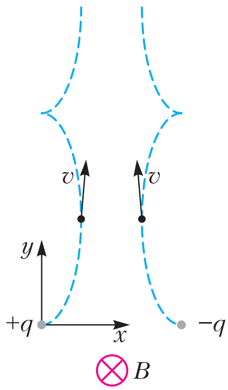


Рис. 2

Ньютона для каждой из частиц имеет вид

$$m\vec{a} = \vec{F}_\text{К} + \vec{F}_\text{Л}.$$

В проекциях на ось y это уравнение для частицы с зарядом $+q$ дает

$$ma_y = qv_xB,$$

где a_y – проекция вектора ускорения частицы на ось y, v_x – проекция ее скорости на ось x. Это уравнение справедливо в любой момент времени, при том что проекции ускорения и скорости частицы изменяются. Поэтому, если умножить уравнение в каждый момент времени на малый интервал времени Δt около этого момента и просуммировать за все моменты времени от начала до некоторого момента времени t, получим

$$m\left(a_{y1}\Delta t_1 + a_{y2}\Delta t_2 + a_{y3}\Delta t_3 + \cdots\right) = \\ = qB\left(v_{x1}\Delta t_1 + v_{x2}\Delta t_2 + v_{x3}\Delta t_3 + \cdots\right).$$

Сумма в скобках слева есть изменение проекции скорости частиц на ось y от $t = 0$ до t. А поскольку начальная скорость равна нулю, то эта сумма равна проекции скорости на ось y в момент времени t. Сумма в скобках справа есть изменение x-координаты частицы за это время. А так как начальная x-координата заряда $+q$ равна нулю, то это его x-координата в момент t. Таким образом, между проекцией скорости заряда на ось y и его x-координатой есть следующая связь:

$$mv_y = qBx.$$

Аналогичная связь имеет место и для отрицательно заряженной частицы. При этом в точке максимального сближения частиц их скорости будут направлены по оси y, т.е. проекция скорости на ось y равна модулю скорости. Эту величину можно найти по закону сохранения энергии:

$$2\frac{mv^2}{2} = -\frac{kq^2}{d} + \frac{kq^2}{d-2x},\ v = \sqrt{\frac{2xkq^2}{md\left(d-2x\right)}}.$$

Таким образом, из формулы для координаты положительно заряженный частицы в точке максимального сближения частиц (в случае, когда они не сталкиваются) получаем связь координаты x частицы и индукции магнитного поля, которое развернет скорости частиц параллельно друг другу:

$$\sqrt{\frac{2km}{d\left(d-2x\right)x}} = B.$$

Последняя формула сводится к квадратному уравнению относительно координаты x положительно заряженной частицы в точке максимального сближения частиц:

$$x^2 - \frac{d}{2}x + \frac{km}{B^2d} = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получим

$$x_{1,2} = \frac{d}{4} \pm \sqrt{\frac{d^2}{16} - \frac{km}{B^2d}}.$$

Отсюда следует, что квадратное уравнение имеет решение (т.е. существует такое расстояние , пройденное частицами, когда их скорости становятся параллельными), если

$$\frac{d^2}{16} - \frac{km}{B^2d} > 0,\ \text{или}\ B \ge 4\sqrt{\frac{km}{d^3}}.$$

Это условие и определяет минимальное магнитное поле, разворачивающее скорости частиц:

$$B_{\min} = 4\sqrt{\frac{km}{d^3}},$$

причем при таком магнитном поле частицы сближаются на расстояние $d - 2x = \dfrac{d}{2}$.

Обратим внимание, что при минимальном магнитном поле, не дающем сблизиться частицам больше, чем на расстояние $d/2$, реализуется следующая ситуация. После того, как скорости частиц станут параллельны друг другу, магнитная составляющая силы Лоренца, отталкивающая частицы друг от друга, будет точно равна кулоновской силе их притяжения:

$$F_Л = qvB = q\sqrt{\frac{2xkq^2}{md\left(d-2x\right)}} \cdot 4\sqrt{\frac{km}{d^3}} = \frac{4kq^2}{d^2}.$$

Это значит, что при минимальном магнитном поле, не дающим столкнуться частицам, после поворота скоростей частицы будут лететь параллельно друг другу на расстоянии $d/2$. Если же магнитное поле будет больше минимального, то скорости частиц станут параллельными при меньшей координате x и магнитная составляющая силы Лоренца будет больше кулоновской силы притяжения частиц. Частицы начнут расходиться, и будет реализовываться ситуация, показанная на рисунке 2 (частицы разойдутся снова на расстояние d, потом опять сблизятся и т.д.).

Из формулы для B следует очевидный предельный случай. Очень большому магнитному полю ($B \to \infty$) отвечает координата $x = 0$. Действительно, в случае очень большого поля частицам достаточно набрать небольшую скорость (т.е. совсем чуть-чуть приблизиться по отношения к первоначальному расстоянию), чтобы поле смогло повернуть их скорости параллельно друг другу.

Задачи

1. Как, используя три единицы и три семерки, а также знаки арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление), составить выражение, значение которого равно 2022? Возведение в степень использовать можно, а скобки нельзя.

Т.Голенищева-Кутузова

2. На столе лежали 7 яблок (не обязательно одинакового веса). Таня положила 3 яблока на одну чашу весов, а 4 – на другую, и весы остались в равновесии. А Саша положил 2 яблока на одну чашу и 5 – на другую, и весы опять остались в равновесии. Докажите, что можно положить на одну чашу весов одно яблоко, а на другую – три, и весы останутся в равновесии.

А.Шаповалов

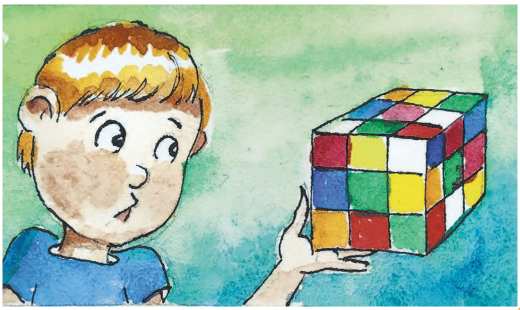
Эти задачи предлагались XXVII Турнире математических боев имени А.П.Савина.

3. На острове живут честные, лжецы и хитрецы. Все знают друг про друга, кто есть кто. Каждого жителя острова попросили написать, сколько среди них честных. Честные написали правильно, лжецы соврали, а хитрецы – кто как. Каждый записал двузначное число. Оказалось, что цифра 3 была написана 33 раза, цифра 5 была написана 66 раз, а цифра 7 была написана 77 раз. Никакие другие цифры написаны не были. Сколько всего честных среди жителей этого острова?

Т.Казицына, Б.Френкин

4. Каждую грань куба размером 3×3×3 разбили на 9 единичных квадратов, а затем в некоторых из них провели по одной диагонали. Оказалось, что при этом получился «циклический узор», т.е. каждый конец проведенной диагонали служит концом еще ровно одной диагонали. Какое наибольшее количество диагоналей могло быть проведено?

М.Евдокимов



Иллюстрации Д.Гришуковой

Башня Толи Втулкина

С.ДВОРЯНИНОВ

К 55-летию Останкинской телебашни

СЕЙЧАС ВЫ УЗНАЕТЕ, ЧТО БЫЛО на заседании нашего школьного кружка по физике в декабре далекого 1967 года... Когды мы все собрались и уже уселись за парты, в класс вошел наш учитель Иван Петрович, а вслед за ним через широко раскрытую дверь – Толик Втулкин. Обеими руками он держал перед собой лист фанеры, на котором были рассыпаны какие-то цилиндрические упаковки от витаминов (рис.1).

Рис. 1

– Внимание! Сейчас Толик продемонстрирует нам силу мысли! Можно сказать, телекинез, перемещение предметов силой воли! – торжественно произнес Иван Петрович. – Вы станете первыми свидетелями сенсационного открытия!

Мы все насторожились: наши занятия никогда подобным образом не начинались. Толик же после этих слов с самым серьезным видом уселся за учительский стол, нахмурил брови и стал неотрывно смотреть на зажатую руками фанеру. Мы замерли, не зная, чего нам ожидать.

И вдруг – о чудо! – цилиндрики начали шевелиться. Они потихоньку задвигались по фанере, приближаясь один к другому. Мы в недоумении замерли. Прошла, кажется, минута, и вот из всех цилиндриков сложился один длинный цилиндр. Все не отрывали от него глаз.

– Это еще не все, смотрите дальше! – прервал тишину Иван Петрович.

После этих слов Толик откинулся на стуле назад и, как после тяжелой работы, резко выдохнул. В тот же миг неподвижный цилиндр словно встрепенулся – и на фанере оказалась вертикальная башня. Она была довольно высокой, но при этом не падала. Толик даже наклонял свою фанерку из стороны в сторону, но башня стояла устойчиво, будто вкопанная.

Потом Толик неожиданно поднялся из-за стола, и башня рассыпалась. Белые цилиндрики раскатились по фанерке. Весь класс восторженно зашумел, а кто-то даже захлопал в ладоши.

– Неужели, ребята, вы не знали, что такое возможно? – с серьезным видом обратился к нам Толик. – Каждый из вас может повторить этот опыт, надо только очень сильно захотеть. Пусть попробует это сделать... – он обвел класс глазами.

Тут все наперебой загалдели, кому быть первым. В общем, решили, что повторит опыт Маша. Она расположилась перед столом и сосредоточилась. Не мигая, она смотрела перед собой. От напряжения Маша даже раскраснелась. И опять все повторилось: цилиндрики сначала сблизились, а потом выросла башня. Маша была потрясена.

– Ну как, ребята? Кто разгадал этот фокус? – обратился к нам Иван Петрович.
– Это действительно фокус. Присмотритесь внимательней.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220903

Мы сгрудились вокруг стола и обнаружили, что все составные элементы Толиной башни были нанизаны на тонкую леску, словно бусинки на нить. Леска проходила через дырку в фанере, а ее второй конец был привязан к Толику, к его поясу. Демонстрируя якобы огромное напряжение, Толик постепенно отклонялся назад. Длина части лески, идущей поверх фанеры, уменьшалась, и все коробочки выстраивались вдоль прямой линии. На заключительном этапе вся эта конструкция оказывалась в вертикальном положении (рис. 2). Разобравшись с этим, многие

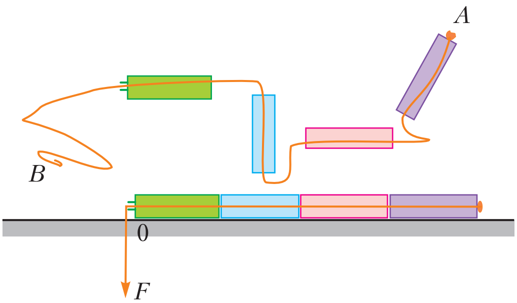


Рис. 2

из нас по очереди заняли Толино место и повторили все его действия.

Потом оказалось, что Толик устроил это представление не только ради развлечения и что его башня похожа… на знаменитую Останкинскую (рис. 3). Когда все немного угомонились, Иван Петрович напомнил нам, что месяц назад, 4 ноября (как было сказано, описываемые события относятся к 1967 году), с Останкинской башни впервые ушел в эфир телевизионный сигнал. На момент завершения строительства наша башня была высочайшим сооружением в мире.

А еще мы узнали, что идею строительства башни из бетона предложил инженер, архитектор и ученый в области строительных конструкций Николай Васильевич Никитин (1907–1973). До этого все подобные сооружения были из металла. Прочность и устойчивость телебашни обеспечивают проходящие внутри нее натянутые тросы. Эти тросы – их 149 – прижимают бетонные кольца башни одно к другому, подобно Толиной леске. Это позволило


Рис. 3

сделать фундамент башни сравнительно неглубоким – всего около пяти метров. Конусообразное основание башни напоминает перевернутый цветок лилии с крепкими лепестками и толстым стеблем.

Предложенная Никитиным конструкция была основана на наработках Юрия Васильевича Кондратюка (1897–1942), автора нереализованного проекта ветряной мельницы на горе Ай-Петри. Ю.В.Кондратюк – один из основоположников космонавтики. В 1919 году, независимо и одновременно с К.Э.Циолковским, он получил уравнение движения ракеты и предложил ее многоступенчатую конструкцию, привел схему камеры сгорания ракетного двигателя, рассчитал оптимальную траекторию полета к Луне. Впоследствии ее назвали «трассой Кондратюка».

Вот так один маленький фокус Толи Втулкина помог нам узнать большие тайны Останкинской телебашни и еще многое с ней связанное.

Можно ли отклонить астероид?

М.НИКИТИН

Астероиды – это космические тела Солнечной системы, выделенные в особую группу из-за своих орбит и размеров. Основная масса астероидов находится в главном поясе между орбитами Марса и Юпитера (рис. 1) на расстояниях 2,2–3,2 астрономических единиц (а.е.) от Солнца. Значительная часть астероидов обращается на окраинах Солнечной системы, в так называемом поясе Койпера, на расстояниях 30–50 а.е.

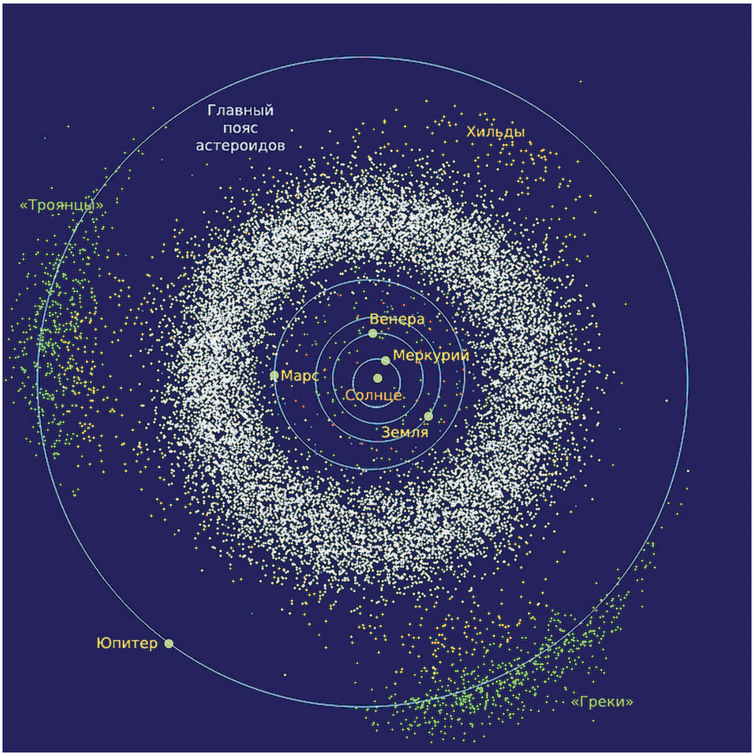


Рис. 1. Главный пояс астероидов (белый цвет) и троянские астероиды Юпитера (зеленый цвет)

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220904

И в главном поясе, и в поясе Койпера обнаружены астероиды разных размеров и форм. Самые маленькие имеют размеры десятков метров, самые большие, такие как Церера и Паллада, достигают 950 и 550 км соответственно. Столь большой разброс в размерах астероидов связан с особенностями их образования на ранней стадии формирования Солнечной системы.

В силу ряда причин астероиды время от времени сближаются с Землей и сталкиваются с ней. В зависимости от траекторий и габаритов астероидов эти столкновения могут носить тот или иной разрушительный характер. Чтобы лучше представить себе опасность встречи Земли даже с рядовым по размерам астероидом, проведем простые оценки. Предположим, что астероид размером 100 м из хондрита с относительной скоростью 25 км/с приближается к Земле. Кинетическая энергия такого астероида составляет приблизительно $2 \cdot 10^{18}$ Дж. При столкновении с Землей она вся перейдет в энергию взрыва, эквивалентную взрыву термоядерной бомбы мощностью в 480 Мт (480 миллионов тонн тротила). Нетрудно угадать последствия такого взрыва, сопоставляя его со страшными разрушениями, произведенными атомными бомбами в Хиросиме и Нагасаки мощностью всего лишь в 40 кт.

Астероид в 100 метров был выбран нами только потому, что, используя его данные, легко оценить разрушительные эффекты других астероидов с учетом того, что их масса меняется пропорционально кубу размера. При таком подходе выясняется, что стометровые астероиды являются некой границей, разделяющей умеренно опасные астероиды от очень опасных. Типичным примером первых является Аризонский астероид, который врезался в Землю 50000 лет назад. После взрыва этого астероида на поверхности Земли образова-

Рис. 2. Кратер в Аризоне, образованный при падении астероида 50000 лет назад

лась воронка диаметром 1,2 км и глубиной 230 м (рис. 2). По оценкам специалистов, перед взрывом Аризонский астероид двигался со скоростью 45–60 тысяч километров в час, имел массу 300000 т и размер 50 м.

Намного более впечатляющие свидетельства катастрофических столкновений астероидов с Землей обнаружены в Юкатане (Мексика) и Вредерфорде (ЮАР). Диаметр кратера в Юкатане составляет 180 км, в Вредерфорде – 300 км. Кратер в Юкатане образован астероидом размером около 10 км, врезавшимся в Землю 65 миллионов лет назад, кратер в Вредерфорде – астероидом размером 10–15 км, взорвавшимся 2 миллиарда лет назад. С падением первого астероида связывают гибель динозавров в Меловом периоде, с падением второго связывают глобальные геофизические и биологические изменения, произошедшие в Протерозойскую эру.

В таблице приведены данные, которые дают оценку периодичности падения на Землю астероидов различных размеров и возможные последствия их взрывов на поверхности Земли. Как видно из таблицы, существует достаточно высокая вероятность, что в обозримой перспективе на Землю может упасть астероид размером от 100 метров и больше, взрыв которого приведет к катастрофическим последствиям локального и регионального характера. В связи с этим возникает естественный вопрос: можно ли предотвратить падение такого астероида на нашу планету? И если можно, то какие существуют для этого возможности?

Ответ на поставленные вопросы может быть сформулирован в виде двух возможных решений.

1) Астероид нужно отклонить от опасной траектории так, чтобы он пролетел на безопасном от Земли расстоянии.

2) Астероид нужно разрушить на более мелкие составные части, которые в случае их

Размер	Оценка количества	Периодичность	Возможные последствия столкновения
30 м	3 млн	150 лет	Взрыв в атмосфере; образование небольшого кратера; разрушение зданий и некоторое количество раненых и/или погибших
100 м	50 тысяч	10000 лет	Кратер диаметром 1–2 км; локальные разрушения; большое количество погибших и раненых
300 м	7000	70000 лет	Кратер в несколько километров диаметром; катастрофа регионального/национального уровня; миллионы погибших
1 км	1000	500000 лет	Глобальные эффекты; частичное уничтожение человеческой цивилизации
10 км	3	10 млн лет	Конец человеческой цивилизии

падения на Землю не будут представлять большой опасности для людей.

Попытаемся разобраться в сущности представленных решений.

Коррекция траектории астероида

Рассмотрим вначале вариант возможной коррекции траектории произвольного астероида на небольших расстояниях от Земли, когда траекторию астероида можно считать прямой линией. Это, конечно, не совсем корректно. Траектории астероидов являются эллиптическими, но при упрощенном подходе легко получить простые соотношения, помогающие лучше понять проблему коррекции траекторий астероидов с помощью различных механизмов воздействия на них.

На рисунке 3 изображены две прямолинейные траектории астероида: исходная, проходящая по линии прямого попадания на Землю, и скорректированная, проходящая на минимальном расстоянии d от Земли. Нетрудно получить простое соотношение, связывающее дополнительный поперечный импульс астероида с его исходным импульсом и минимальным расстоянием пролета астероида:

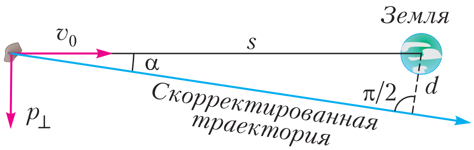


Рис. 3. Исходная и скорректированная траектории астероида

$$p_\perp = p_0 \operatorname{tg}\alpha = p_0 \frac{d}{\sqrt{s^2 - d^2}},$$

где $p_\perp$ и d – поперечный импульс и минимальное расстояние пролета астероида от центра Земли, p_0 – начальный импульс астероида, s – расстояние от Земли, на котором астероид получил поперечный импульс. Для $d \ll s$ получим

$$p_\perp = \frac{p_0}{s} d.$$

В оба выражения для $p_\perp$ входит параметр d, который задан без учета действия силы притяжения Земли. Оценим влияние гравитационного поля Земли на траекторию астероида, пролетающего вблизи нашей планеты. Для этого воспользуемся двумя законами сохранения: полной механической энергии и момента импульса астероида. Напомним, что момент импульса движущихся тел сохраняется при движении в центральных силовых полях, примером которых является гравитационное поле. Величина момента импульса тела в каждой точке траектории определяется как произведение радиального расстояния до силового центра на импульс вращательного движения тела относительно силового центра. С учетом данного определения законы сохранения полной механической энергии и момента импульса астероида можно записать следующим образом:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{GmM}{s} = mv^2 - \frac{GmM}{r},$$

$$p_\perp s = mvr,$$

где G – постоянная тяготения, m – масса астероида, M – масса Земли и r – минимальное расстояние сближения астероида с Землей. Решая эти уравнения с учетом того, что $p_\perp = \frac{p_0}{s} d$ и $v_\perp \ll v_0$, получим явное выражение для r:

$$r \approx d - \frac{Rv_1^2}{v_0^2},$$

где v_1 – первая космическая скорость, R – радиус Земли. Отсюда видно, что d должно быть не просто больше, а значительно больше $\frac{Rv_1^2}{v_0^2}$ для того, чтобы гарантировать безопасность скорректированной траектории астероида. Для относительной скорости движения астероида порядка 20 км/с второе слагаемое в формуле для r значительно меньше первого, поэтому приближение

$$p_\perp = \frac{p_0}{s} d$$

приемлемо для оценок $p_\perp$ в случае, когда d в разы большие, чем R.

Для оценки величины корректирующего импульса в зависимости от параметра d зададим $d = 2R$. Это условие вполне отвечает, с определенной натяжкой, требованиям гарантированной безопасности пролета астероида мимо Земли. Рассмотрим два способа сообщения астероиду поперечного импульса: 1) с помощью реактивной силы, создаваемой ракетным буксиром, закрепленным на его поверхности; 2) с помощью ударного воздействия на астероид ракеты, сообщающей ему импульс, перпендикулярный исходной скорости.

В первом случае при условии, что масса выброшенной реактивной струи значительно меньше массы астероида, поперечный импульс астероида будет равен $p_\perp = m_т u$, где $m_т$ – масса выброшенного ракетного топлива, u – скорость истечения реактивной струи из ракетного двигателя, закрепленного на астероиде. Получаем оценку затрат топлива для нужной коррекции траектории астероида:

$$m_т \approx \frac{\rho l^3 v_0 d}{us},$$

где ρ и l – удельная плотность и характерный размер астероида. (В случае использования ракеты-тарана в этой формуле вместо скорости истечения будет фигурировать относительная скорость ракеты.) Проведем численный расчет затрат топлива, необходимого для коррекции траектории астероида размером 30 м на расстоянии 1,0 млн км. Подставляя $\rho = 4{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3, $l = 30$ м, $v_0 = 25000$ м/с, $d = 12{,}7 \cdot 10^6$ м, $s = 10^9$ м и $u = 3000$ м/с, получим $m_т \approx 2900$ т.

Оценим теперь массу ракеты-тарана, необходимую для той же перестройки траектории астероида. Для этого вновь воспользуемся формулой для $m_т$, но только скорость истечения реактивной струи заменим на поперечную скорость ракеты (поперечную по отношению к траектории астероида). Для скорости ракеты-тарана 20 км/с масса будет составлять 435 т.

Сопоставляя два числа: 2900 и 435, нетрудно сделать вывод о том, что использование таранного удара значительно выгоднее, чем реактивной тяги, так как на расстояние 1,0 млн км придется доставлять значительно меньший по массе груз. Хотя и в этом случае задача коррекции траектории 30-метрового астероида будет достаточно сложной с технической точки зрения.

Формула для $m_т$ показывает, что эффект коррекции траектории астероида сильно зависит от трех параметров: наименьшего допустимого расстояния сближения, размеров астероида и точки коррекции. Уменьшение s и увеличение d приводят к увеличению массы ракеты-тарана. Увеличение s, наоборот, приводит к сильному уменьшению массы ракеты-тарана, но для больших s оценки следует делать с учетом кривизны траектории астероида (об этом речь пойдет дальше). Третий критический параметр – размер астероида – является самым весомым с точки зрения характеристик коррекции, так как масса астероида растет пропорционально третьей степени его размера. Отсюда следует вывод: успешная коррекция астероидов в ближней к Земле зоне с помощью ударного воздействия может быть осуществлена только для сравнительно небольших астероидов, меньших 30 м.

Разрушение астероида

Рассмотрим теперь вопрос о разрушении астероида на фрагменты в случае удара или подрыва. Задача разрушения астероида под действием мощного импульса очень сложна и требует использования сложного математического анализа. Но для оценки мы вновь воспользуемся простейшей физической моделью.

Важным параметром, характеризующим деформацию и разрушение твердых тел, является напряжение. Оно определяется отношением силы давления к площади поверхности, к которой приложена сила. В случае воздействия на астероид с помощью взрыва или ракеты-тарана ударное напряжение в материале астероида может быть грубо оценено по формуле

$$\sigma \approx \frac{F}{A} = \frac{p}{At} \approx \frac{pv_з}{Al},$$

где p – переданный астероиду импульс, $v_з$ – скорость звука в материале астероида, A – площадь поперечного сечения астероида. Здесь молчаливо предполагается, что передача взрывного импульса астероиду происходит за характерное время, равное времени прохождения звука через астероид. Это очень грубое приближение реального физического процесса, но оно дает вполне приемлемую оценку напряжений в астероиде.

Воспользуемся последней формулой для оценки величины ударного импульса, приводящего к появлению напряжений сжатия, способных разрушить астероид:

$$p \approx \frac{\sigma_c V}{v_з},$$

где σ_c – предельное напряжение сжатия, V – объем астероида. Для астероида из хондрита, например, $\sigma_c \approx 4{,}1 \cdot 10^8$ Н/м^2, $v_з \approx 4{,}0 \cdot 10^3$ м/с.

(Продолжение см. на с. 34)

Химик без знания физики подобен человеку, который всего искать должен ощупом. И сии две науки так соединены между собой, что одна без другой в совершенстве быть не могут.

Михаил Ломоносов

... химия, по моему мнению, должна многое позаимствовать от физико-химических исследований и даже принять некоторые методы физики...

Дмитрий Менделеев

У физиков есть привычка брать простейший пример какого-то явления и называть его «физикой», а примеры посложнее отдавать на растерзание другим наукам, скажем ...химии...

Ричард Фейнман

Вся кулинария – это , по сути дела, физика (и, разумеется, химия)...

Джирл Уокер

А что же такое химия, как не физический процесс обмена веществ электронными оболочками!

Альберт Стасенко

А так ли хорошо знакомы вам ФИЗИКА + ХИМИЯ ?

Как, еще одно содружество физики с сопредельными естественно-научными областями, еще один междисциплинарный альянс? Конечно! Каких только комбинаций не возникает, если нужно объединять усилия, если все более сложные задачи требуют синтеза методов, идей, подходов различных наук. Неудивительно, кстати, что в Москве есть два академических института – химической физики и физической химии.

И в школьных курсах мы найдем точки пересечения физики и химии – когда речь идет о молекулярно-кинетической теории, строении кристаллов, электролизе или взаимодействии излучения с веществом.

Что ж, пройдемся под руку с физикой и химией по окрестностям этих точек.

Вопросы и задачи

1. Препарат содержит в молекуле восемь атомов углерода, девять атомов водорода, один атом азота и два атома кислорода. Каковы молекулярная формула препарата, его относительная молекулярная масса и молярная масса?

2. Известно, что скорость многих химических реакций возрастает с повышением температуры. А как увеличить их скорость, не прибегая к нагреву веществ?

3. Встречаются ли в природе вещества с кристаллами в форме «платоновых тел» – правильных многогранников?

4. Чугун плавится при более низкой температуре, чем железо. Почему?

5. В слабый раствор соляной кислоты опускают яйцо. Сначала оно тонет, затем всплывает, поднявшись до верха, снова тонет и т.д. Как это объяснить?

6. Герметично закрытый сосуд полностью заполнен водой при температуре 27 °С. Каким стало бы давление внутри сосуда, если бы силы взаимодействия между молекулами воды исчезли, а температура не изменилась?

7. Какой газ тяжелее азота, но легче кислорода?

8. В закрытом сосуде при давлении p_0 находится смесь из одного моля кислорода и двух молей водорода. Между газами происходит реакция с образованием водяного пара. Какое давление установится в сосуде после охлаждения до первоначальной температуры? Конденсации пара не происходит.

9. Могут ли при диссоциации молекул образоваться ионы одного какого-нибудь знака?

10. Каким образом, опустив два провода от гальванического элемента в стакан водопроводной воды, можно узнать, существует ли между ними постоянное напряжение?

11. Бак для воды, изготовленный из листового алюминия с помощью медных заклепок, быстро разрушается из-за коррозии. Отчего?

12. Почему перекись водорода сохраняют в склянках из желтого стекла?

13. В физиотерапевтических кабинетах поликлиник при горении кварцевых ламп ощущается запах озона. Чем это объясняется?

14. В настоящее время в принципе можно осуществить мечту алхимиков средневековья – превратить ртуть в золото. Каким образом?

Микроопыт

В стакане с водой свежее куриное яйцо должно опуститься на дно. Растворяя в воде поваренную соль, можно заставить яйцо всплыть. Что за процессы «руководят» поведением яйца?

Любопытно что...

... мельчайших частиц – отдельных молекул – таких неорганических веществ, как поваренная соль или сода, не существует. Их кристаллы при растворении распадаются на части, образуя ионы, и в растворе никаких «самостоятельных» молекул мы не найдем.

... автор известного из курса физики газового закона, английский ученый Роберт Бойль еще в XVII веке изобрел первый химический прибор – индикатор кислотности среды (лакмусовую бумагу), что стало исходным шагом от древней алхимии к современной науке.

... проведя множество опытов с 45 веществами при различных степенях разбавления, шведский физико-химик Сванте Аррениус создал теорию электролитической диссоциации, встреченную, правда, в штыки именитыми учеными, в том числе и Менделеевым. Однако теория оказалась исключительно плодотворной для развития науки, а Аррениус одним из первых был удостоен в 1903 году Нобелевской премии по химии.

...самым же первым же лауреатом Нобелевской премии по химии стал нидерландский ученый Якоб Вант-Гофф. Как и Аррениус, он пришел к пониманию зависимости скорости химических реакций от температуры, что, кстати, особенно важно для многих процессов органической химии, в том числе – приготовления пищи.

... свою окончательную и ясную формулировку квантовая механика получила в 1926 году, в знаменитом уравнении, выведенном австрийским физиком-теоретиком Эрвином Шрёдингером. Это уравнение поставило на прочный теоретический фундамент всю химию: стал понятен смысл атомного номера в таблице Менделеева и значения валентности, выяснена природа химических связей.

... открытый физиками в сороковые годы прошлого века ядерный магнитный резонанс (ЯМР) оказался одним из важнейших аналитических методов в химии, незаменимый при изучении сложных органических молекул.

...в 1981 году физики Г.Бинниг и Г.Рорер из швейцарского отделения фирмы IBM создали сканирующий туннельный микроскоп, приведший к возможности собирать молекулярные конструкции из отдельных атомов. Так возникло направление, получившее название «нанотехнологии».

... в ряду достижений электрохимии выделяются литий-ионные аккумуляторы, все более расширяющие сферу своего применения. Так, для беспилотных летательных аппаратов они оказались хороши тем, что не оставляют теплового следа и превосходят другие типы подобных источников электричества по удельной энергии.

Что читать в «Кванте» о союзе физики и химии
(публикации последних лет)

1. «Варить, парить или полоскать?» – 2017, №9, с.2;

2. «Д.И.Менделеев и периодическая система элементов» – 2019, №5, с.2;

3. «Источники электричества» – 2020, №4, с.2;

4. «Время жизни шипучей таблетки в стакане воды» – 2021, №9, с.2, № 10, с.12;

5. «Тепловые эффекты – квантовая природа» – 2022, №2, с.12.

Материал подготовил А. Леонович

(Начало см. на с. 28)

Подставляя эти данные и $l = 30$ м, найдем величину ударного импульса, необходимого для разрушения 30-метрового астероида: $p \approx 3 \cdot 10^9$ кг · м/с, а вслед за ним и массу ракеты-тарана астероида:

$$m = \frac{p}{v} = \frac{3 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^4}\text{ кг} = 1{,}5 \cdot 10^5\text{ кг} = 150\text{ т}.$$

Сопоставляя два числа: 435 и 150, делаем вывод о том, что отклонение астероида на безопасное расстояние с высокой вероятностью будет сопровождаться его разрушением. Этот вывод, подтверждаемый более основательными аргументами, справедлив для астероидов любых размеров, так как эффекты коррекции и разрушения пропорциональны массе и, соответственно, объему астероида. При этом с увеличением размера астероида требуемый ударный импульс возрастает пропорционально кубу характерного размера. В результате для астероида размером около 1 км разрушительный импульс будет составлять $p \approx 10^{14}$ кг · м/с. Подобным импульсом, например, обладает масса в 5,0 миллионов тонн, разогнанная до скорости 20 километров в секунду. Понятно, что разогнать столь большую массу до космической скорости технически невозможно.

Ударные импульсы величиной порядка 10^{14} кг · м/с и больше способны произвести только термоядерные взрывы. Об этом свидетельствуют результаты надземных и подземных ядерных испытаний, в которых наблюдались масштабные разрушения структуры и формы земного вещества. В частности, при подземных взрывах термоядерных зарядов мощностью в 3 Мт образовывались воронки радиусом 100 м и глубиной 40 м. Естественно предположить, что при взрыве мощных термоядерных устройств над или под поверхностью астероида будут также наблюдаться масштабные разрушения его структуры и формы. Есть теоретические работы, в которых с разной степенью детализации рассмотрены вопросы разрушения астероидов разных размеров под действием мощных термоядерных взрывов. Важным результатом этих работ является вывод о том, что даже астероиды-убийцы размером в 1 км могут быть разрушены на фрагменты термоядерными взрывами мощностью в 100 и больше мегатонн. Эти результаты дают надежду на то, что в случае возникновения реальной астероидной угрозы люди смогут найти техническое решение, сводящее эту угрозу к минимальному ущербу. Уже сейчас хорошо просматривается стратегия ликвидации астероидной опасности. Она будет заключаться в последовательной серии подрывов астероида и его фрагментов до стадии, когда его рассеянные осколки не будут представлять опасности для Земли. Заключительной фазой может быть термоядерное сжигание фрагментов размерами в десятки метров.

Оценим мощность термоядерного заряда, необходимую для сжигания, например, однородного железного астероида. Простой состав вещества такого астероида упрощает выбор необходимых параметров для оценок. Рассмотрим астероид с характерным размером $l = 30$ м. Для того чтобы испарить такой астероид, потребуется энергия $E_{\text{ис}} \approx c\rho l^3$, где $c = 6{,}1 \cdot 10^6$ Дж/кг – удельная теплота испарения, $\rho = 7800\text{ кг/м}^3$ – плотность железа. Помимо испарения вещества при термоядерном подрыве астероида значительная часть энергии взрыва пойдет на ионизацию, разогрев и ускорение образовавшегося плазменно-пылевого облака. Также не менее половины энергии взрыва будет излучена в противоположную от астероида сторону. С учетом указанных факторов полная энергия взрыва должна равняться $E \approx \alpha E_{\text{ис}}$, где α – параметр, учитывающий эти факторы. Зададим его равным 5, что допустимо с учетом неопределенности вклада каждого фактора. В результате получим

$$E \approx \alpha c\rho l^3 \approx 6 \cdot 10^{15}\text{ Дж},$$

что эквивалентно энергии термоядерного взрыва мощностью 1,4 Мт.

Описанная выше многоступенчатая схема фрагментации больших астероидов требует согласованной и точной работы измерительно-технической системы отслеживания астероида и его фрагментов, а также точного наведения космических аппаратов, несущих термоядерные заряды. Эта система должна работать с хорошим запасом времени, чтобы вовремя вносить нужные коррективы в функционирование всех составных элементов. В идеале она должна осуществлять перехват опасных астероидов на расстояниях в десятки миллионов километров от Земли, чтобы исключить малейший шанс падения на Землю опасных по размерам фрагментов большого астероида. На таких расстояниях не применимо использованное нами приближение прямолинейного движения астероидов мимо Земли и необходимо учитывать эллиптическую форму их траекторий. Рассмотрим вкратце процедуру расчета скорректированных траекторий астероидов с учетом их эллиптической формы.

Кеплеровские орбиты астероида

Исходная кеплеровская орбита описывается уравнением

$$r = \frac{b}{1 + e\cos\varphi},$$

где r – расстояние небесного тела до Солнца, φ – полярный угол, отсчитываемый от линии, соединяющей Солнце и перигелий, $b = 2r_{\max}r_{\min}/(r_{\max} + r_{\min})$ – параметр орбиты, $e = (r_{\max} - r_{\min})/(r_{\max} + r_{\min})$ – ее эксцентриситет. Параметр орбиты и эксцентриситет астероида определяются моментом импульса L_0 и полной механической энергией E_0:

$$b = \frac{L_0^2}{GMm^2} \text{ и } e = \sqrt{1 + \frac{2L_0^2E_0}{G^2m^3M^2}},$$

где M – масса Солнца, m – масса астероида.

Как показывают модельные расчеты, при внешнем воздействии, не приводящим к разрушению астероида, орбитальный параметр b и полная механическая энергия E_0 меняются очень слабо. При этом небольшие изменения траектории происходят не только за счет перпендикулярного внешнего импульса, но и за счет его продольной составляющей. Причиной этого является зависимость момента импульса астероида от взаимной ориентации внешнего импульса и исходной скорости астероида. В частных случаях, когда внешний импульс направлен вдоль или поперек скорости v_0, момент импульса астероида после воздействия равен

$$L = L_0 \pm r_1p\sin\psi \text{ и } L = L_0 \pm r_1p\cos\psi,$$

где ψ – угол между вектором начальной скорости и направлением на Солнце, r_1 – расстояние от Солнца до точки приложения корректирующего импульса.

В случае сохранения плоскости орбитального движения радиальное смещение опасного астероида, подвергнутого внешнему смещению, вблизи Земли может быть приближенно рассчитано по формуле

$$\rho_2 - r_2 \approx \frac{r_1\left(b^* - b\right)\cos\varphi_1}{r_1(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) + b\cos\varphi_2},$$

где ρ_2 – расстояние скорректированной траектории астероида до Солнца в момент наибольшего сближения с Землей, r_2 – расстояние астероида до Солнца в точке возможного столкновения с Землей, r_1 – расстояние астероида до Солнца в момент коррекции траектории, b^* и b – орбитальные параметры скорректированной и исходной траекторий астероида, φ_1 – полярный угол точки коррекции траектории астероида, φ_2 – полярный угол точки столкновения астероида и Земли. Как видно, величина радиального смещения астероида зависит от параметров орбит астероида и Земли и от изменения орбитального параметра. Изменения орбитального параметра, в свою очередь, зависят от величины корректирующего импульса и его ориентации относительно исходной скорости астероида.

На рисунке 4 представлены расчеты радиальных отклонений километрового астероида, подвергнутому удару с передачей значительного по величине импульса для двух расстояний воздействия: 10,0 и 200,0 миллионов километров. Сплошные линии получены для случая, когда импульсы астероида и внешнего воздействия совпадают, штриховые, когда они противоположны, и точечные, когда они взаимно перпендикулярны.

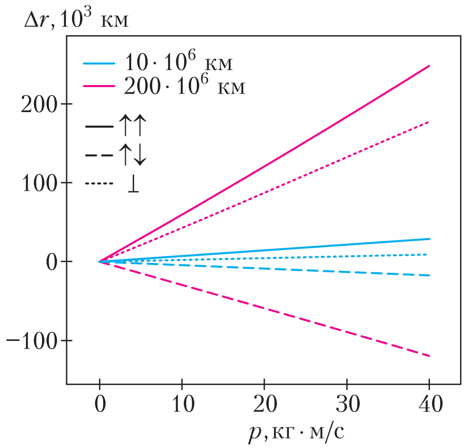


Рис. 4. Радиальное отклонение километрового астероида в зависимости от различных условий: точки приложения корректирующего импульса и взаимной ориентации импульса и исходной скорости астероида

Отметим главные особенности представленных расчетов:

- радиальные отклонения пропорциональны величине внешнего импульса, что следует из условия $\left|b^* - b\right| \ll b$;
- корректирующее воздействие на астероид зависит от взаимной ориентации внешнего импульса и исходной скорости, оно значительно сильнее в случае параллельности векторов импульса и скорости астероида;
- для безопасных отклонений астероида как целого необходимы импульсы, значительно большие 10^{14} кг · м/с при действии на сравнительно небольших расстояниях от Земли; импульсы подобной величины, скорее всего, приведут к разрушению астероида;
- корректирующее воздействие на астероид на астрономических расстояниях в сотни миллионов километров позволяет переводить астероид на безопасную траекторию с сохранением его целостности.

* * *

Представленные в статье оценочные расчеты возможных последствий внешнего воздействия на астероиды с размерами меньше 100 метров показывают, что в настоящее время существуют технические возможности устранения опасности падения таких астероидов на Землю. Для этого можно использовать как коррекцию траектории с помощью внешнего импульсного воздействия, так и подрыв астероида с помощью термоядерных взрывов. В случае возникновения опасности столкновения с километровыми астероидами задача устранения астероидной угрозы значительно усложняется. Обязательным элементом успешного решения ее становится заблаговременный прогноз траекторий опасных астероидов для того, чтобы осуществить необходимые процедуры коррекции или подрыва на больших расстояниях от Земли. Важным составным элементом такого прогноза являются высокоточные астрономические наблюдения за потенциально опасными малыми телами Солнечной системы.

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Моделирование иллюзии лунного терминатора

А.КОВАЛЬДЖИ

Чудеса освещения. Во время заката или восхода Солнца бывает удивительное явление: освещенная часть Луны выглядит так, как будто Солнце находится высоко в небе, а не близко к горизонту (рис. 1). Такая картинка особенно выразительна, когда мы видим 3/4 или чуть больше освещенной части Луны, а сама Луна находится на высоте 45 градусов или больше над горизонтом. Это явление называется иллюзией лунного терминатора. Терминатор – видимая линия между освещенной и неосвещенной частью Луны или планеты. Эта линия на самом деле – окружность, но под углом она видна как эллипс. Перпендикуляр к плоскости терминатора указывает направление на Солнце.

Рис. 1. Луна высоко, Солнце на закате, а кажется, что свет идет сверху

Существует много попыток объяснения этой иллюзии, вплоть до психологических, но мы предлагаем чисто геометрическую модель явления.

Параллельность лучей. На закате лучи Солнца, идущие к Луне, почти параллельны площадке, на которой стоит наблюдатель. Это связано с тем, что Солнце в 400 раз дальше от Земли, чем Луна, поэтому получается вытянутый треугольник, у которого две стороны почти параллельны (рис. 2). Если соединить центр Солнца с центрами Земли и Луны, то угол между направлениями составит 0,14 градуса. Поэтому в дальнейшем вместо «почти параллельны» мы будем писать «параллельны».

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220905

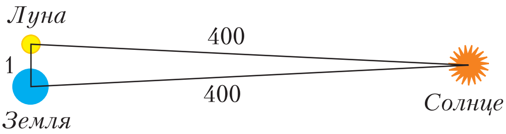


Рис. 2. Практически параллельные лучи от Солнца, идущие к Земле и Луне

Поскольку Земля кажется нам плоской, то будем считать, что наблюдатель стоит на плоскости, касательной к сфере Земли. Тогда на закате Солнца его лучи идут к Луне и к наблюдателю параллельно плоскости, на которой стоит наблюдатель. Но параллельные линии кажутся нам сходящимися на горизонте (перспектива).

Проведем вертикальную плоскость через центры Солнца и Луны . Для наглядности, в эту же плоскость поместим ряд телеграфных столбов с проводами, которые сходятся на горизонте (рис. 3). Провода параллельны солнечным лучам. Солнце на закате расположено сзади и правее наблюдателя. Линия горизонта определена направлением, в котором мы смотрим на Луну.

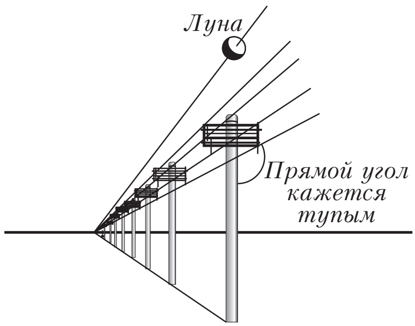


Рис. 3. Параллельные лучи Солнца в плоскости столбы–Луна–Солнце сходятся на горизонте

Иллюзия лунного терминатора состоит в том, что параллельные лучи, сходящиеся на горизонте, кажутся идущими сверху.

Модель Луны. Возьмем шар, например, для пинг-понга или ненужный елочный шар и покрасим его в белый и черный цвета. Белая половина будет символизировать освещенную часть Луны, а черная – неосвещенную. Белая сторона считается обращенной к Солнцу, причем лучи Солнца перпендикулярны к плоскости терминатора. Глядя на шар-Луну снизу, мы видим какую-то часть освещенной стороны Луны и какую-то часть – неосвещенной.

Шар надо насадить на ось длиной примерно полметра и держать ее на вытянутой руке перед собой (рис. 4). Сделайте угол зрения

Рис. 4. Иллюзия лунного терминатора у себя дома

на Луну не менее 45 градусов над горизонтом. Вращая ось, мы будем получать различные расположения Луны, Солнца и наблюдателя относительно друг друга (рис. 5).

Сравним положение модели Луны с реальным видом Луны (рис. 6). Они полностью соответствуют друг другу, а следовательно, модель действительно демонстрирует иллюзию лунного терминатора.

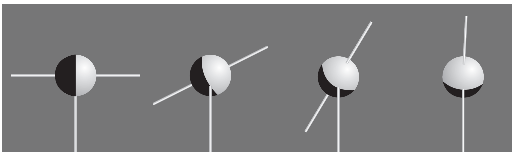


Рис. 5. Лучи Солнца, параллельные площадке наблюдателя, освещают модель Луны с разных сторон. Горизонтальный стержень направлен к Солнцу

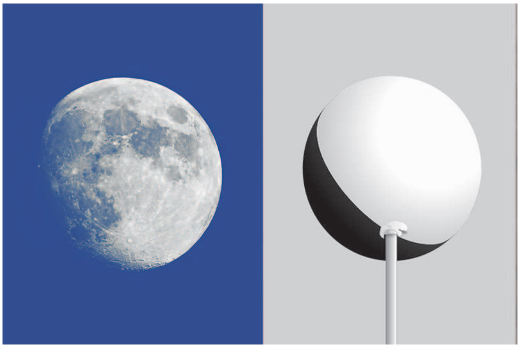


Рис. 6. Сравнение модели Луны с реальным видом Луны

Расстановки по кругу и арифметика остатков

Е.БАКАЕВ, П.КОЖЕВНИКОВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАССМОТРИМ задачи, в которых так или иначе речь идет о расстановках объектов по кругу. Зачастую в решении задач будет помогать арифметика остатков.

Если задача не разбирается в тексте статьи, то к ней дается решение или указание в конце журнала. На написание этой статьи авторов вдохновили задачи Вячеслава Викторовича Произволова, о которых, в большой степени, и пойдет речь. О нем и его задачах можно прочитать в «Кванте» №9 за 2020 год. Также сообщаем, что в этом году в издательстве МЦНМО была переиздана книга «Задачи на вырост», которую мы рекомендуем всем читателям.

Нумерация остатками

Начнем с *арифметики остатков*.

Допустим, мы знаем, что числа 12345 и 67890 дают при делении на 12 остатки 9 и 6 соответственно, и теперь нас интересует, какой остаток при делении на 12 будет давать их сумма $12345 + 67890$. Для этого не обязательно вычислять эту сумму и делить ее на 12. Сумма будет давать такой же остаток, как и $9 + 6 = 15$, т.е. остаток 3. Иными словами, остатки 9 и 6 сложились и дали в сумме остаток 3. Таким образом, часто бывает удобно рассуждать в арифметике остатков. Возьмем все остатки при делении, например, на число $n = 12$, т.е. числа 0, 1, 2, …, 11, эти остатки также называют *вычетами* по модулю n. На множестве остатков естественно определяется операция сложения: просто сложим два остатка, а если результат превзойдет 11, то возьмем от него остаток при делении на 12.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220906

Далее мы часто будем говорить про равенство чисел именно в смысле их равенства как остатков. Например, 5 и 17 равны, если речь идет об остатках при делении на 12. Эту же мысль можно выразить так: *5 и 17 сравнимы по модулю* 12, или $5 \equiv 17 \pmod{12}$.

Для примера посмотрим, что происходит с остатками после прибавления 5:

$$0+5\equiv 5,\ 1+5\equiv 6,\ 2+5\equiv 7,\ 3+5\equiv 8,$$

$$4+5\equiv 9,\ 5+5\equiv 10,\ 6+5\equiv 11,\ 7+5\equiv 0,$$

$$8+5\equiv 1,\ 9+5\equiv 2,\ 10+5\equiv 3,\ 11+5\equiv 4.$$

Изобразим это точками на прямой: будем проводить стрелку от a к b, если $a+5\equiv b$ (рис. 1).

Попробуем теперь проиллюстрировать операцию прибавления 5, изобразив остатки точками, делящими окружность на $n = 12$ равных дуг, далее будем называть такую

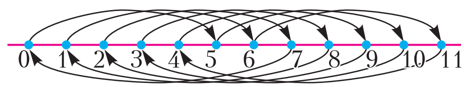


Рис. 1

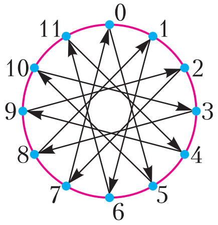


Рис. 2

окружность *n-окружностью* (рис. 2). Видно, что на окружности операция прибавления 5 устроена красиво и просто: прибавить к какому-то остатку остаток 5 – значит сдвинуться на 5 делений по часовой стрелке. Тем самым, операция прибавления остатка – это просто поворот.

Это наше наблюдение – одна из причин, по которой в задачах (в том числе весьма сложных!) с комбинаторными сюжетами на окружности может помочь арифметика остатков, или наоборот, в задачах про остатки может помочь «круговая интерпретация».

Начнем с двух задач.[1] В их условиях об остатках речь не идет, и как раз важный шаг в решении – пронумеровать объекты остатками.

1 (вариация задачи М11)**.** По кругу стоят $n = 44$ дерева, и на каждом из них сидит по веселому чижу. Каждую минуту два чижа перелетают на соседние деревья – один по часовой стрелке, а другой – против. Смогут ли все чижи собраться на одном дереве?

Решение. Занумеруем деревья остатками при делении на n: 0, 1, 2, ..., $n-1$. Текущий номер чижа будет равен номеру дерева, на котором он находится. Тогда каждую минуту номера изменяются ровно у двух чижей – у одного номер изменится на +1, а у другого – на –1 (в арифметике остатков при делении на n). А значит, в процессе выполнения операций не изменяется остаток при делении суммы номеров чижей на n. В начальной ситуации сумма равна $0+1+2+\ldots+(n-1) = n(n-1)/2$. Если предположить, что все чижи собрались на одном дереве номер k, то сумма остатков будет равна kn, т.е. будет иметь остаток 0. С другой стороны, при четном n число $n(n-1)/2$ не делится на n. Тем самым, получено противоречие, доказывающее, что чижи не смогут собраться на одном дереве. Задача решена.

[1] Условия задач будем просто нумеровать: 1, 2, 3 и т.д.

В качестве дополнения рассмотрим еще одно соображение. Раскрасим деревья в черный и белый цвета поочередно. Легко заметить, что четность количества чижей, сидящих на черных деревьях, не меняется. Но это соображение не приводит к противоречию, хотя при четных n, не кратных 4, оно бы к противоречию привело.

2 (В.Произволов, М1381)**.** Окружность разбита $2n$ точками на равные дуги. Докажите, что у любой замкнутой $2n$-звенной ломаной с вершинами во всех этих точках есть хотя бы два параллельных звена.

Решение. Занумеруем точки по порядку остатками 0, 1, 2, ..., $2n-1$ при делении на $2n$ и рассмотрим ломаную с вершинами в этих точках. На каждом ее звене запишем сумму чисел, стоящих в концах звена. Легко проверить очень простой критерий параллельности звеньев: числа, записанные на них, дают равные остатки при делении на $2n$. Предположив, что параллельных звеньев нет, получим, что на звеньях написаны разные остатки при делении на $2n$, т.е. сумма всех таких остатков равна $S = 0+1+2+\ldots$ $\ldots+(2n-1)$. С другой стороны, сумма чисел на всех звеньях – это удвоенная сумма чисел, написанных на всех вершинах (каждая вершина «отдает» свой номер двум звеньям). Получаем, что $2S$ и S должны давать один остаток при делении на $2n$. Но тогда $S = (2n-1)n$ должно делиться на $2n$, что невозможно – получаем противоречие.

Вот еще задачи с похожей идеей.

3 (А.Толпыго, вариация задачи М2335)**.** По кругу расположены 16 лунок, одна из которых отмечена. Петя и Вася играют в следующую игру. В начале игры Вася кладет шарик в одну из лунок. Далее за каждый ход Петя называет натуральное число k (числа k могут отличаться на разных ходах), а Вася перемещает шарик из лунки, в которой он находится, на k лунок по часовой либо против часовой стрелки (по своему усмотрению). Сможет ли Петя играть так, чтобы через несколько ходов шарик гарантированно попал в отмеченную лунку?

4 (В.Произволов, М1769)**.** Концы $2n$ непересекающихся хорд разделили окружность на $4n$ равных дуг. Докажите, что среди этих хорд найдутся две параллельные хорды.

a-кузнечик на n-окружности

Зададимся следующим вопросом.

Окружность разделена точками на $n = 12$ равных дуг длины 1. По этим точкам прыгает кузнечик – за один ход он может сместиться на a сторон по часовой стрелке. Сможет ли он посетить все n точек?

Заметим, что на рисунке 2 мы уже рисовали такой граф возможных перемещений кузнечика для $a = 5$. Нарисуем такой *граф прыжков* для $a = 4$ (рис. 3). Нумерацию остатков мы не стали указывать, ведь остаток 0 может быть приписан на этом рисунке любой вершине – а остатки 1, 2, 3, … идут за ним по часовой стрелке, как мы уже договорились.

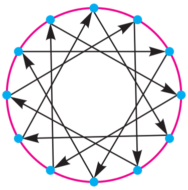


Рис. 3

Внимательно посмотрев на рисунки 2 и 3, можно увидеть существенную разницу – на первом граф прыжков образует один цикл (поэтому ответ на вопрос – да), а на втором – 4 треугольных цикла (и ответ на вопрос – нет).

Советуем читателю самостоятельно разобрать остальные варианты возможных a, рассмотрев аналогичные графы прыжков – в уме или на листке бумаги.

Перейдем теперь к общему случаю – от $n = 12$ точек к произвольному n. Как тогда по числам n и a установить, сможет ли кузнечик посетить все вершины? Если кузнечик начинает с вершины 0, то, двигаясь по часовой стрелке, он будет посещать вершины с номерами $1a$, $2a$, $3a$,… (по модулю n). Если он вернется в вершину, в которой был, раньше, чем за n прыжков, то не все вершины окажутся посещенными. Поэтому, чтобы посетить все вершины, первые n посещенных вершин должны быть разными. Таким образом, мы можем переформулировать вопрос следующим образом.

Пусть n и a – натуральные числа. При каких условиях на n и a в ряду n чисел

$$0a,\ 1a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ (n-1)a$$

встретятся все остатки при делении на n? Иными словами, при каком условии операция домножения на a дает взаимно однозначное соответствие на множестве остатков при делении на n?

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *В ряду n чисел*

$$0a,\ 1a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ (n-1)a$$

встретятся все остатки при делении на n тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(a,n) = 1$.

Докажем ее в «кузнечиковых» терминах. Номера точек, в которые прыгает кузнечик, – $0a$, $1a$, $2a$, $3a$, …, $(n-1)a$ (по модулю n). Если не все точки окажутся посещены, то какая-то точка будет посещена хотя бы дважды, т.е. некоторые два номера ia и ja для некоторых $0 \le i < j < n$ дают один и тот же остаток при делении на n. Иначе говоря, $ja - ia = (j-i)a$ делится на n. Если $\text{НОД}(a,n) = 1$, то это невозможно, так как $0 < j - i < n$ и $j - i$, как и $(j-i)a$, не делится на n. Если же $\text{НОД}(a,n) = d > 1$, то все числа $0a$, $1a$, $2a$, $3a$, …, $(n-1)a$ будут кратны d, а значит, и их остатки при делении на n будут кратны d – таким образом, встретятся не все остатки. Теорема об a-кузнечике доказана.

Итак, при $\text{НОД}(n,a) = 1$ за n прыжков он посетит все точки по разу и n-м прыжком вернется в исходную точку. Граф прыжков a-кузнечика в таком случае представляет собой цикл длины n.

Посмотрим, что можно сказать о траектории a-кузнечика в случае $\text{НОД}(a,n) = d > 1$. Нетрудно заметить, что номер точки кузнечика всегда будет кратен d. Покажем, что он посетит все точки, кратные d.

Рассуждение по сути повторяет предыдущее после замены, которая нам позволит «поделить все на d»: пусть $a = a'd$, $n = n'd$, и тогда $\text{НОД}(a',n') = 1$. Найдем (натуральный) номер прыжка j, после которого кузнечик впервые вернется в начальную точку. Так как ja кратно n, то $ja'd$ кратно $n'd$, и ja' кратно n'. Так как a' и n' взаимно просты, то наименьшее такое j – это $j = n' = n/d$. Таким образом, за n/d прыжков кузнечик посетит n/d точек – все точки с номерами, кратными d, – и вернется в исходную точку. Образуется цикл длины n/d. Граф прыжков a-кузнечика в таком случае представляет собой объединение d циклов длины n/d.

5. Кузнечик прыгает по вершинам правильного 100-угольника. За один ход он может сместиться на 7 сторон по часовой стрелке или против часовой стрелки. а) Сможет ли он посетить все вершины? б) При каком наименьшем m кузнечик сможет попасть из начальной вершины в любую заданную не более чем за m прыжков?

Решение. Поскольку $\text{НОД}(100,7) = 1$, граф возможных прыжков кузнечика – один цикл длины 100. Отсюда ясно, что ответ на пункт а) положительный. По циклу длины 100 нельзя дойти за 49 или менее шагов до противоположной (с точки зрения цикла) вершины, а за 50 или более шагов уже можно дойти до любой.

Теперь, зная, как устроены траектории a-кузнечика на n-окружности, мы можем решить довольно интересные задачи.

Задача о счастливых бусах

6. Даны натуральные n и $k < n - 1$. Составляется круговое ожерелье из n бусинок, каждая бусинка – красная или синяя. Ожерелье называется *счастливым*, если в нем нет двух красных бусинок, между которыми ровно $k - 1$ бусинок. Какое наибольшее количество красных бусинок может быть в счастливом ожерелье, если а) $n = 16$, $k = 6$; б) $n = 15$, $k = 6$? в) Решите задачу для общего случая.

Решение. Для решения не нужно привлечения новых идей. Нас снова будет интересовать граф прыжков k-кузнечика. В контексте задачи этот граф можно назвать *графом запретов*, поскольку условием запрещено окрашивать красным две бусинки, соединенные ребром. Как мы уже выяснили, такой граф будет представлять собой d независимых циклов длины n/d, где $d = \text{НОД}(n,k)$.

а) При $n = 16$, $k = 6$ получим $d = 2$, т.е. граф запретов является объединением двух циклов длины 8 (один из них показан на рисунке 4). В каждом цикле можно покрасить половину вершин так, чтобы запреты не нарушались – нужно чередовать в цикле красные и синие вершины. Больше половины вершин цикла сделать красными нельзя – в этом случае среди них найдутся две соседние. Получаем ответ: $2 \cdot 4 = 8$.

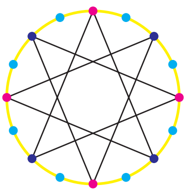


Рис. 4

б) В случае $n = 15$, $k = 6$ имеем $d = 3$, и граф запретов является объединением трех циклов длины 5 (один из них показан на рисунке 5). В каждом пятиугольнике максимальное количество красных вершин равно двум. Поэтому ответ: $3 \cdot 2 = 6$.

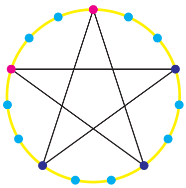


Рис. 5

в) Как мы видим, случаи, когда длина цикла четная и когда нечетная, несколько отличаются. И в цикле длины $2t$, и в цикле длины $2t + 1$ красными могут быть максимум t вершин. Два этих случая можно охватить одной формулой: в цикле длины v – максимум $[v/2]$ красных вершин. Раз в общем случае граф запретов представляет собой d циклов длины n/d, то ответ в задаче: максимум $d \cdot [n/(2d)]$ красных бусинок.

Приведем несколько задач, где нужно применить только что разобранную нами задачу о бусах.

7 (Математический праздник, 2019)**.** Вокруг круглого озера через равные промежутки растут 2019 деревьев – 1009 сосен и 1010 елок. Докажите, что обязательно найдется дерево, рядом с которым растет сосна и с другой стороны от которого через одно дерево тоже растет сосна.

8. Девять вершин выпуклого 20-угольника окрашены в зеленый цвет. Для каких k можно утверждать, что найдется диагональ с зелеными концами, отсекающая от него $(k+1)$-угольник?

9 (М1259, Международная олимпиада, 1990)**.** На окружности дано множество E, состоящее из $2n - 1$ различных точек, где $n \geq 3$, из которых b точек покрашены в черный цвет, а все остальные – в белый. Раскраску точек назовем *хорошей*, если существуют две черные точки, строго между которыми на одной из дуг содержится ровно n точек из множества E. Найдите наименьшее значение b, для которого каждая раскраска множества E является хорошей.

a–кузнечик на *n*–окружности в разных «обертках»

Рассмотрим следующий вопрос.

Пусть теперь кузнечик прыгает по числовой прямой, начиная с точки 0. *За один ход ему разрешается сместиться на расстояние* $a = 15$ *или на* $n = 100$ *в любую сторону. Назовем такого кузнечика* (a,n)*-кузнечиком на числовой прямой. Сможет ли кузнечик попасть в точку, отстоящую на расстояние* 2021 *от вершины* 0*?*

Для того чтобы ответить на вопрос, прокатим колесо с длиной окружности $n = 100$ по числовой прямой. При этом все целые точки, имеющие один и тот же остаток при делении на n, дадут один и тот же отпечаток на окружности (на рисунке 6 показан пример

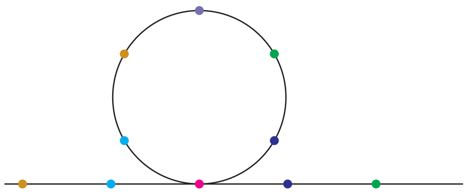


Рис. 6

для $n = 6$). Теперь можно считать, что a-кузнечик прыгает по n-окружности. Прыжок длины n можно не рассматривать – он оставляет кузнечика на месте, и мы приходим к нашей задаче про a-кузнечика на n-окружности. В частности, мы понимаем, что (a, n)-кузнечик сможет посетить те и только те целые точки m числовой прямой, для которых m делится на НОД(a, n).

10. Будем считать, что прыжок длины 100 нашего $(15, 100)$-кузнечика на прямой бесплатный, а за прыжок длины 15 платим 1 рубль. Какое наименьшее количество денег надо иметь, чтобы сместиться на 20 от начальной точки?

Путь (a, n)-кузнечика по прямой легко описать, введя координаты. Пусть кузнечик сделал x прыжков длины a вправо (x позволим быть и отрицательным, считая в таком случае, что сделано $-x$ прыжков влево) и y прыжков длины n вправо. Тогда, стартуя из точки 0, кузнечик попадает в точку с координатой $ax + ny$. Мы получаем еще одну, «теоретико-числовую» интерпретацию прыжков нашего (a, n)-кузнечика:

Линейное диофантово уравнение

$$ax + ny = m$$

разрешимо в целых числах x, y тогда и только тогда, когда m делится на НОД(a, n).

11. Числа x и y целые. Чему может равняться x, если

а) $5x + 24y = 0$;

б) $5x + 24y = 1$;

в) $12x + 30y = 0$?

г) Каково минимальное натуральное число, представимое в виде $12x + 30y$?

Снова о циклах *a*-кузнечика

Приведем еще несколько задач, в которых помогает рассмотрение графа прыжков a-кузнечика.

12 (В.Произволов)**.** Одиннадцать вершин правильного 25-угольника отмечены красным цветом. Обязательно ли найдутся три отмеченные точки, которые являются вершинами некоторого равнобедренного треугольника?

13. Все точки окружности окрашены произвольным образом в два цвета. Докажите, что найдется равнобедренный треугольник с вершинами одного цвета, вписанный в эту окружность.

14 (из японских олимпиад)**.** Какое наибольшее количество вершин правильного 120-угольника можно отметить, чтобы никакие три отмеченные вершины не образовывали равнобедренный треугольник с углами 18°, 81°, 81°?

15 (Конкурс имени А.П.Савина, 2021/22)**.** На окружности отмечена 101 точка, каждая из них покрашена в синий или красный цвет. Известно, что нет пары синих точек, между которыми находится ровно 19 или 20 других точек. Какое наибольшее количество точек может быть синими?

16 (В.Произволов, М1143)**.** Масса каждой из 101 гирек, расположенных по окружности, – натуральное число, а сумма их масс равна 300 г. Докажите, что из этого набора можно выбрать одну или несколько гирек, расположенных подряд, сумма масс которых равна 200 г.

Кузнечики с разными длинами прыжков

Речь пойдет еще об одной красивой задаче В.Произволова – задаче о кузнечике, совершающем прыжки разных длин. Но сначала предлагаем в качестве самостоятельного упражнения решить такую задачу.

17. Кузнечик скачет по вершинам n-угольника. Первый шаг – на 1 сторону по часовой стрелке, потом – на 3 стороны, потом на 5 сторон, на 7 и так далее. В какой вершине он окажется через n прыжков?

18 (В.Произволов, М938)**.** Окружность разделена точками на n равных дуг, длину одной дуги примем за 1. Кузнечик начинает прыгать с некоторой точки и делает последовательно $n - 1$ прыжков: на 1, на 2, …, на

$n-1$ по часовой стрелке. При каких n кузнечик посетит все отмеченные точки?

Решение. После нумерации точек остатками при делении на n получается такая арифметическая переформулировка: при каких n числа $0,\ 0+1,\ 0+1+2,\ \ldots,\ 0+1+2+\ldots+(n-1)$ дают все разные остатки при делении на n? Рассмотрим для некоторых $0 \le i < j < n$ равенство остатков $0+1+2+\ldots+i$ и $0+1+2+\ldots+j$, оно равносильно делимости суммы $(i+1)+\ldots+j = (i+j+1)(j-i)/2$ на n, что равносильно делимости $(i+j+1)(j-i)$ на $2n$.

Докажем, что кузнечик посетит все отмеченные точки в том и только том случае, когда n – степень двойки.

Если $n = 2^k$, то делимость не выполнена. Действительно, одна из скобок $(i+j+1)$ и $(j-i)$ нечетная, а другая не больше $(n-1)+(n-2)+1 < 2n = 2^{k+1}$.

Иначе пусть $n = t\cdot 2^k$, где $t \ge 3$ нечетно. Из чисел 2^{k+1} и t большее число назовем p, а меньшее – q. Приравняем $i+j+1 = p$, $j-i = q$. Так как p и q разной четности, система решится в натуральных i, j, при этом, поскольку $p<n$, найдутся искомые i и j, $0 \le i < j < n$.

Интересно сравнить эту задачу со следующей.

19 (В.Расторгуев, Турнир городов, 2018/19). По кругу лежат $2n+1$ монет орлом вверх. Двигаясь по часовой стрелке, делают $2n+1$ переворотов: переворачивают какую-то монету, одну монету пропускают и переворачивают следующую, две монеты пропускают и переворачивают следующую, три монеты пропускают и переворачивают следующую и т.д., наконец, пропускают $2n$ монет и переворачивают следующую. Докажите, что теперь ровно одна монета лежит решкой вверх.

Можно рассмотреть и другие последовательности длин прыжков.

20. Пусть кузнечик на n-окружности начинает прыгать с некоторой точки и делает последовательно прыжки по часовой стрелке: на 1, на 2, на 4, на 8 и так далее (по степеням двойки). При каких $n>2$ кузнечик рано или поздно посетит все отмеченные точки?

Решение. Будем считать, что кузнечик начал с точки 0. Если n четно, то после первого прыжка кузнечик будет посещать только точки с нечетными номерами, поэтому при четных $n>2$ он не посетит все точки. Рассмотрим теперь случай, когда n нечетно. Если кузнечик сделал k прыжков, то в итоге он попал в точку $1+2+4+\ldots+2^{k-1} = 2^k-1$. Предположим, что он попал в точку $n-1$, тогда $2^k-1 \equiv n-1 \pmod n$, значит, 2^k кратно n, а это невозможно при нечетных $n>1$. Таким образом, задача решена. Ответ: такого не может быть ни при каких n.

Можно также задаться вопросом, при каких нечетных $n>2$ кузнечик посетит все точки, кроме точки $n-1$. При $n=5$ кузнечик посетит сначала точки с номерами 0, 1, 3, 2, поэтому такое n подходит под условие. А при $n=7$ кузнечик будет скакать по точкам 0, 1, 3, 0, 1, 3, 0, …, поэтому такое n не подходит. Оказывается, этот вопрос эквивалентен тому, является ли число 2 первообразным корнем по модулю n.

Про первообразные корни можно прочитать, например, в статье В.Сендерова и А.Спивака «Малая теорема Ферма» в «Кванте» №3 за 2000 год.

О пересадке собеседников за круглым столом

Обратимся к еще одной замечательной задаче Произволова.

21 (Конкурс «Математика 6–8», 1992). а) Двенадцать собеседников совещались за круглым столом. После перерыва они вновь сели за этот стол, но в другом порядке. Докажите, что найдутся два таких собеседника, что между ними (считая от первого ко второму по часовой стрелке) во второй раз окажется столько же собеседников, что и в первый раз.

б) Верно ли будет аналогичное утверждение для $n=27$ собеседников?

Решение. а) Занумеруем места за столом 0, 1, 2, …, 11 и соответственно придадим начальные номера собеседникам. Предположим, условие не выполнено, тогда после перерыва каждый прибавил к своему номеру некоторый остаток по модулю 12, причем эти остатки различны. И в результате получились (в некотором порядке) снова все различные остатки при делении на 12. Итак, приходим к переформулировке: существует ли перестановка $a_0, a_1, \ldots, a_{11}$ остатков 0, 1, 2, …, 11 такая, что $a_0, 1+a_1, 2+a_2, \ldots, 11+a_{11}$ тоже является перестановкой множества всех остатков? Если требуемое возможно, то, с одной стороны, сумма $a_0+(1+a_1)+(2+a_2)+\ldots$ $\ldots+(11+a_{11})$ равнялась бы по модулю 12 сумме $S=0+1+2+\ldots+11$, а с другой стороны – $2S$. Тогда $2S-S=S$ должно делиться на 12, что неверно. Это решение, как видим, проходит, если $n=12$ заменить на любое четное число.

б) Ответ: неверно. Приведем пример. Пересадим гостя с места k на место $2k$ (по модулю 27). Так как 27 – нечетное число, этим правилом действительно задается перестановка. Тогда расстояние $l-k$ между гостями k и l стало $2l-2k$ (по модулю 27). Приравнивание $l-k\equiv 2(l-k)(\operatorname{mod}27)$ дает $l\equiv k(\operatorname{mod}27)$. Значит, между любой парой гостей изменилось расстояние (отсчитываемое от первого гостя до второго по часовой стрелке). Это решение проходит, если $n=27$ заменить на любое нечетное число.

Задача решена.

Посмотрим также, как можно изменить правило пересадки: попробуем пересаживать гостя с места x не на $2x$, а на cx. Во-первых, чтобы по этому правилу два гостя не сели на одно место, нужно, чтобы c было взаимно просто с n. Во-вторых, аналогично рассуждению выше получим $l-k\equiv c(l-k)$ по модулю n, а значит, $(c-1)(l-k)$ кратно n. Чтобы отсюда сделать вывод, что $(l-k)$ кратно n, надо потребовать взаимную простоту чисел $c-1$ и n. Таким образом, при $n=27$ подходит не только $c=2$, но и 5, 8, 11 и так далее.

22 (В.Сендеров, по мотивам задачи М2359). Пусть $n=1001$. На доске нарисован правильный n-угольник, вершины которого занумерованы числами 1, 2, …, n. Из картона вырезали такой же правильный n-угольник. Можно ли в вершинах картонного n-угольника расставить числа 1, 2, …, n (каждое число – по одному разу) так, чтобы при любом наложении n-угольников в какой-то вершине оказались равные числа?

Решите задачу в двух вариантах: а) картонный многоугольник можно только поворачивать, б) его можно поворачивать и переворачивать.

Решение. а) На самом деле, эта задача эквивалентна предыдущей! Нумерация картонного многоугольника показывает новую рассадку гостей. И если при каждом из n поворотов имеется совпадение номеров вершин, то оно ровно одно, и, значит, все гости по отношению к начальному расположению сдвинулись по часовой стрелке на разные сдвиги.

б) Итак, пусть $1+a_1, 2+a_2, \ldots, n+a_n$ – нумерация вершин картонного многоугольника. Это перестановка чисел 1, 2, …, n по модулю n. Кроме того, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ должна быть перестановкой чисел 1, 2, …, n по модулю n. Далее, не должно быть совпадений расстояний между номерами после переворота, т.е. для различных остатков i, j остатки разностей $i-j$ и $(j+a_j)-(i+a_i)$ не должны совпадать по модулю n. Иначе говоря, $2i+a_i$ и $2j+a_j$ должны давать разные остатки при делении на n для разных i, j.

Таким образом, вот полная переформулировка задачи: существует ли перестановка $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чисел 1, 2, …, n такая, что наборы $\{i+a_i\}$ и $\{2i+a_i\}$ также являются перестановками чисел 1, 2, …, n?

Для $n=1001$ ответ положительный: достаточно взять $a_i=i$ (т.е. гость переходит с места x на место $2x$), и все условия будут выполнены. Так же решается задача для всех нечетных n, не кратных 3.

Попробуем, как и в задаче про 27 гостей, применить правило, при котором x превращается в cx, т.е. $a_x=(c-1)x$, чтобы проверить, не даст ли это решение задачи еще для каких-нибудь n. Для этого необходимо и достаточно, чтобы наборы $\{(c-1)i\}$, $\{ci\}$ и $\{(c+1)i\}$ были перестановками по модулю n, а это равносильно тому, что $c-1$, c и $c+1$ взаимно просты с n. Но если n кратно 2 или 3, то это невозможно. Поэтому пересадка $x\to cx$ не дает новых результатов по сравнению с $x\to 2x$.

Оказывается, для нечетных n, делящихся на 3, но не делящихся на 9, ответ на вопрос отрицательный. Красивое доказательство этого факта нашел Вадим Ретинский. Приведем здесь его рассуждение.

Пусть все условия из переформулировки задачи выполнены для $n=3m$. Запишем в таблицу $3\times n$ строчки друг под другом: в первой строчке запишем $a_1, a_2, a_3, \ldots$, во второй – $1+a_1, 2+a_2, 3+a_3, \ldots$, в третьей – $2+a_1, 4+a_2, 6+a_3, \ldots$ Заменим все числа в таблице на остатки 0, 1, 2 по модулю 3. Так как в каждой строчке до замены была перестановка чисел 1, 2, …, n по модулю $n=3m$, то после замены в каждой строке будет поровну нулей, единиц и двоек. Если i не делится на 3, то в трех ячейках i-го столбца таблицы числа пробегают все остатки по модулю 3, т.е. находятся 0, 1, 2 в каком-то порядке; и во всех $2m$ столбцах с номерами, не кратными 3, поровну чисел 0, 1 и 2. Значит, их поровну и в объединении m столбцов с номерами, кратными 3. Но эти столбцы состоят либо только из 1, либо только из 2, либо только из 0. Значит, каждого из типов должно быть поровну, поэтому m делится на 3, а n делится на 9. Рассуждение В.Ретинского закончено. Ответ на вопрос задачи для n, кратных 9, пока не известен.

Отметим еще такую интересную связь этой задачи с предыдущими. Рассмотрим искомую перестановку a_i. Вернемся к пронумерованным точкам на окружности. Проведем стрелки от вершин с номерами a_i к $a_i + 2i$. Тогда, во-первых, из каждой вершины выходит одна стрелка и входит в нее одна стрелка. Во-вторых, все эти стрелки разные (т.е. не совпадают при поворотах). В-третьих, все точки типа $a_i + i$ разные, а это полусумма чисел a_i и $a_i + 2i$, т.е. середина дуги от a_i к $a_i + 2i$. А раз середины таких дуг для всех стрелок разные, то при нечетном n это значит, что среди стрелок от a_i к $a_i + 2i$ нет параллельных! Что, конечно, напоминает нам о задачах 2 и 4…

В завершение приведем еще одну непростую задачу про перестановки по кругу.

23 (Д.Храмцов, региональный этап Всероссийской олимпиады, 2013)**.** На окружности длины 2013 отмечены 2013 точек, делящих ее на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовем *расстоянием* между двумя точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем n можно переставить фишки так, чтобы снова в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удаленными не более чем на n, увеличилось?

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

ЕГЭ по физике

В 2022 году вариант ЕГЭ по физике состоял из 30 заданий: 23 задания в первой части (с кратким ответом) и 7 заданий во второй части (с развернутым ответом).

Из заданий первой части 12 оценивались максимум в 1 балл, 11 – максимум в 2 балла. Из 11 двухбалльных заданий в пяти требуется выбрать все правильные утверждения из пяти предложенных. Первые два задания первой части – межраздельные, в ответе на каждое из них требуется проявить знание различных разделов физики.

Из заданий второй части одно качественное (24, максимум 3 балла), два средней сложности (25 и 26, максимум 2 балла), три повышенной сложности (27,28, 29, максимум 3 балла), а за последнее 30-е задание можно было получить максимум 4 балла (3 балла за решение и 1 балл за обоснование применимости физических законов и корректности написания формул).

Всего за весь вариант можно было получить максимум 54 первичных балла.

Варианты 2023 года по структуре будут мало чем отличаться от вариантов 2022 года. Демонстрационный вариант ЕГЭ-2023 можно найти на сайте ФИПИ.

Ниже приводится один из открытых вариантов ЕГЭ 2022 года с ответами ко всем заданиям, требующим краткого ответа, и решениями всех задач, требующих развернутого ответа. Решения даются в редакции, предложенной предметной комиссией.

Инструкцию по выполнению работы и необходимые справочные данные можно найти в журнале «Квант» №9 за 2020 год или на сайте ФИПИ.

Часть 1

Ответами к заданиям 1–23 являются число или последовательность цифр. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Едини-

цы измерения физических величин писать не нужно.

1. Выберите все верные утверждения о физических явлениях, величинах и закономерностях. Запишите цифры, под которыми они указаны.

1) При равноускоренном движении ускорение тела за любые равные промежутки времени изменяется одинаково.

2) В процессе кипения жидкости при постоянном внешнем давлении ее температура не меняется.

3) Сила тока короткого замыкания определяется только внутренним сопротивлением источника.

4) В поперечной механической волне колебания частиц происходят в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны.

5) В результате α-распада элемент смещается в Периодической системе элементов Д.И.Менделеева на две клетки ближе к концу.

2. Даны следующие зависимости величин:

А) зависимость периода свободных колебаний пружинного маятника с жесткостью пружины k от массы груза;

Б) зависимость объема постоянной массы идеального газа от абсолютной температуры в изотермическом процессе;

В) зависимость сопротивления цилиндрического медного проводника длиной l от площади его поперечного сечения.

Установите соответствие между этими зависимостями и видами графиков, обозначенных цифрами 1–5 на рисунке 1. Для каждой зависимости подберите соответствующий вид графика и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами. Цифры в ответе могут повторяться.

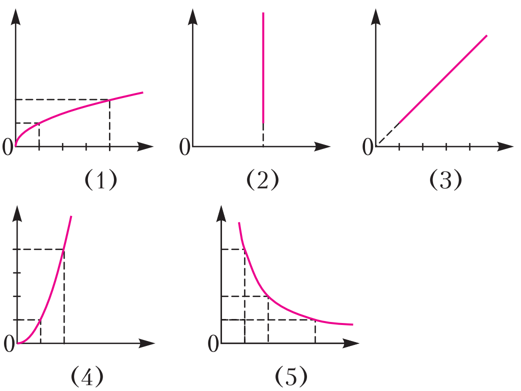


Рис. 1

3. Координата x тела меняется с течением времени t согласно закону $x = 23 + 5t - 2t^2$, где все величины выражены в СИ. Определите проекцию a_x ускорения этого тела.

4. Легковой автомобиль и грузовик движутся со скоростями $v_1 = 90$ км/ч и $v_2 = 60$ км/ч соответственно. Масса легкового автомобиля $m = 1500$ кг. Какова масса грузового автомобиля, если отношение модуля импульса грузовика к модулю импульса легкового автомобиля равно 2?

5. Определите давление керосина в открытой цистерне на глубине 1,5 м. Атмосферное давление не учитывайте.

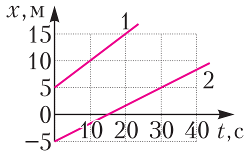


Рис. 2

6. На рисунке 2 приведены графики зависимости координат x двух тел, прямолинейно движущихся по оси x, от времени t. На основании графиков выберите все верные утверждения о движении тел.

1) Проекция v_{1x} скорости тела 1 больше проекции v_{2x} скорости тела 2.

2) В момент времени 15 с тело 2 достигло начала отсчета.

3) Проекция a_{1x} ускорения тела 1 больше проекции a_{2x} ускорения тела 2.

4) Проекция v_{2x} скорости тела 2 равна 3 м/с.

5) Проекция a_{1x} ускорения тела 1 равна 0,5 м/с^2.

7. Груз изображенного на рисунке 3 пружинного маятника совершает гармонические колебания между точками 1 и 3. Как меняются модуль скорости груза и жесткость пружины при движении груза маятника от точки 3 к точке 2?

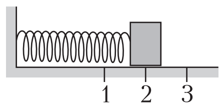


Рис. 3

Для каждой величины определите соответствующий характер ее изменения:

1) увеличивается; 2) уменьшается; 3) не изменяется.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

8. После удара шайба массой m начала скользить с начальной скоростью $\vec{v}_0$ вверх по плоскости, установленной под углом α к горизонту (рис. 4). Переместившись вдоль оси x на расстояние s, шайба соскользнула в исходное положение. Коэффициент трения шайбы о плоскость равен μ.

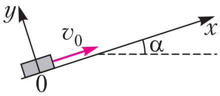


Рис. 4

Формулы А и Б позволяют рассчитать значения физических величин, характеризующих движение шайбы. Установите соответствие между формулами и физическими величинами, значение которых можно рассчитать по этим формулам.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

ФОРМУЛЫ	ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ
А) $\mu mg\cos\alpha$	1) модуль проекции силы тяжести на ось y
Б) $g(\mu\cos\alpha+\sin\alpha)$	2) модуль силы трения
	3) модуль ускорения шайбы при ее движении вверх
	4) модуль ускорения шайбы при ее движении вниз

9. Известно, что 2 моль идеального газа при температуре $3T_0$ и давлении $3p_0$ занимают объем V_0. Сколько молей идеального газа будут занимать объем $1{,}5V_0$ при температуре $2T_0$ и давлении p_0?

10. Температура куска металла с удельной теплоемкостью 900 Дж/(кг · К) понизилась от 120 °C до 40 °C. При этом выделилось количество теплоты, равное 108 кДж. Чему равна масса этого куска металла?

11. На VT-диаграмме (рис. 5) показан процесс изменения состояния 1 моль одноатомного идеального газа. Газ в этом процессе совершил работу, равную 4 кДж. Какое количество теплоты получил газ?

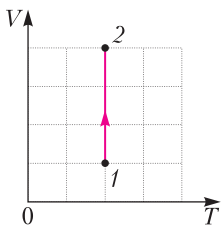


Рис. 5

12. На рисунке 6 представлены графики зависимости температуры t двух тел одинаковой массы от сообщенного им количества теплоты Q. Первоначально тела находились в твердом агрегатном состоянии. Используя данные графиков, выберите из предложенного перечня все верные утверждения.

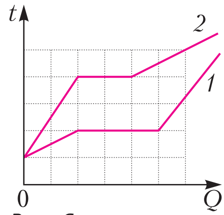


Рис. 6

1) Удельная теплота плавления первого тела больше удельной теплоты плавления второго тела.

2) Оба тела имеют одинаковую удельную теплоемкость в жидком агрегатном состоянии.

3) Тела имеют одинаковую удельную теплоемкость в твердом агрегатном состоянии.

4) Удельная теплоемкость второго тела в твердом агрегатном состоянии в 3 раза больше, чем первого.

5) Температура плавления второго тела в 2 раза выше, чем температура плавления первого тела.

13. Детский темно-зеленый воздушный шарик надули в тени под деревом, а затем вынесли на солнечный пляж. Как начали при этом изменяться объем воздуха в шарике и средняя кинетическая энергия молекул в шарике? Оболочка шарика тонкая, упругая и мягкая.

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличивается; 2) уменьшается; 3) не изменяется.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

14. На графике (рис. 7) показана зависимость силы тока в проводнике от времени.

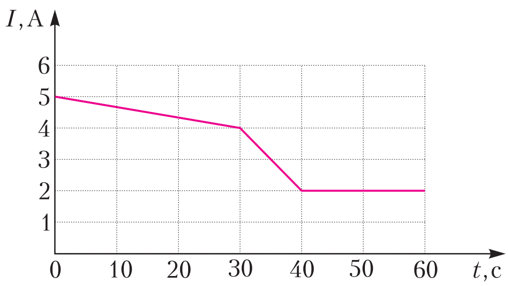


Рис. 7

Определите заряд, прошедший через поперечное сечение проводника за $\Delta t = 60$ с.

15. Две частицы с зарядами $q_1 = 2q$ и $q_2 = q$ влетают в однородное магнитное поле перпендикулярно вектору магнитной индукции со скоростями $v_1 = v$ и $v_2 = 2v$ соответственно. Определите отношение модулей сил $F_1 : F_2$, действующих на частицы со стороны магнитного поля.

16. На рисунке 8 приведен график зависимости силы тока в идеальном колебательном контуре от времени в процессе свободных электромагнитных колебаний. Каким станет период свободных электромагнитных колебаний в контуре, если конденсатор в этом контуре заменить на другой, емкость которого в 4 раза меньше?

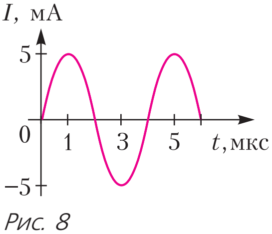


Рис. 8

17. Проводник *АБ* подвешен на тонких проволочках и подключен к источнику постоянного напряжения так, как показано на рисунке 9. Справа от проводника находится южный полюс постоянного магнита. Ползунок реостата плавно перемещают *влево*. Из приведенного ниже списка выберите все правильные утверждения, характеризующие данный процесс.

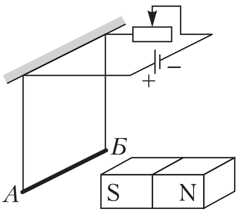


Рис. 9

1) Сопротивление реостата увеличивается.

2) Линии индукции магнитного поля, созданного магнитом вблизи проводника *АБ*, направлены вправо.

3) Сила тока, протекающего через проводник *АБ*, увеличивается.

4) Сила Ампера, действующая на проводник *АБ*, увеличивается.

5) Силы натяжения проволочек, на которых подвешен проводник *АБ*, уменьшаются.

18. Световой пучок входит из воздуха в стекло (рис. 10). Что происходит при этом с частотой электромагнитных колебаний в световой волне и с длиной волны?

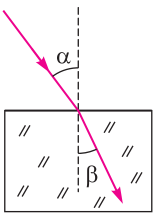


Рис. 10

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличивается; 2) уменьшается; 3) не изменяется.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

19. В первой экспериментальной установке положительно заряженная частица влетает в однородное электрическое поле так, что вектор скорости $\vec{v}_0$ частицы параллелен вектору напряженности электрического поля $\vec{E}$ (рис. 11). Во второй установке вектор скорости $\vec{v}_0$ отрицательно заряженной частицы

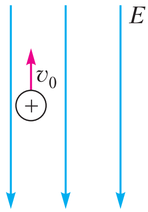


Рис. 11

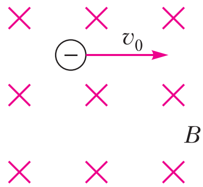


Рис. 12

перпендикулярен вектору индукции магнитного поля $\vec{B}$ (рис. 12). По каким траекториям движутся частицы в этих установках? Силой тяжести пренебречь.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ	ТРАЕКТОРИЯ
А) в первой установке	1) прямая линия
	2) окружность
Б) во второй установке	3) спираль
	4) парабола

20. Ядра хрома $^{56}_{24}Cr$ испытывают β-распад с периодом полураспада 6 мин. В момент начала наблюдения в образце содержится $8 \cdot 10^{20}$ ядер этого изотопа хрома. Через какую из точек *1*, *2*, *3* или *4*, кроме точки *А* (рис. 13), пройдет график зависимости от времени числа еще не распавшихся ядер хрома?

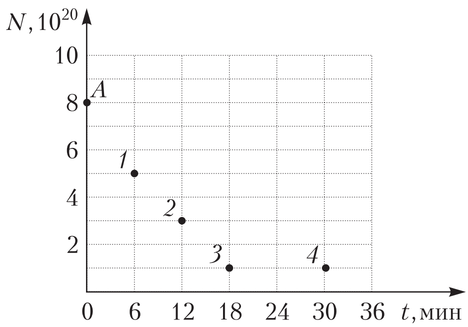


Рис. 13

21. Монохроматический свет с длиной волны λ падает на поверхность металла, вызывая фотоэффект. При изменении энергии падающих фотонов увеличивается модуль запирающего напряжения $U_{зап}$. Как изменяются при этом максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов и длина волны $\lambda_{кр}$, соответствующая «красной границе» фотоэффекта?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличивается; 2) уменьшается; 3) не изменяется.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

22. Определите показания амперметра (рис. 14), если абсолютная погрешность прямого измерения силы тока равна цене деления амперметра.

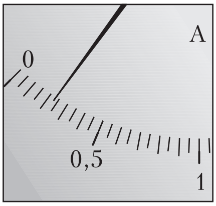


Рис. 14

В бланк ответов №1 перенесите только числа, не разделяя их пробелом или другим знаком.

23. Ученику необходимо на опыте обнаружить зависимость давления газа, находящегося в сосуде, от объема газа. У него имеются пять различных сосудов с манометрами. Сосуды наполнены различными газами при различной температуре (см. таблицу). Массы газов одинаковы. Какие *два* сосуда необходимо взять ученику, чтобы провести данное исследование? Запишите в ответе номера выбранных сосудов.

№ сосуда	Объем сосуда, л	Температура газа в сосуде, К	Газ в сосуде
1	6	320	аргон
2	5	350	неон
3	4	320	аргон
4	4	270	аргон
5	4	300	неон

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи ответов на задания 24–30 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер задания (24, 25 и т.д.), азатем решение соответствующей задачи. Ответы записывайте четко и разборчиво.

24. На рисунке 15 показана принципиальная схема электрической цепи, состоящей из источника тока с отличным от нуля внутренним сопротивлением, резистора, реостата и измерительных приборов – идеального амперметра и идеального вольтметра. Как будут изменяться показания приборов при перемещении движка реостата *вправо*? Ответ поясните, указав, какие физические явления и закономерности вы использовали для объяснения.

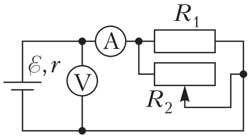


Рис. 15

Полное правильное решение каждой из задач 25–30 должно содержать законы и формулы, применение которых необходимо и достаточно для решения задачи, а также математические преобразования, расчеты с численным ответом и при необходимости рисунок, поясняющий решение.

25. Тележка массой 2 кг, прикрепленная к горизонтальной пружине жесткостью 200 Н/м, совершает свободные гармонические колебания (рис. 16). Амплитуда колебаний тележки равна 0,1 м. Какова максимальная скорость тележки? Массой колес можно пренебречь.

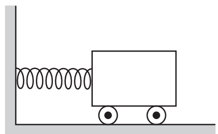


Рис. 16

26. Лазер со средней мощностью импульса 1,1 кВт излучает в импульсе 10^{19} фотонов с длиной волны 600 нм. Какова длительность импульса?

27. В комнате при 20 °C относительная влажность воздуха составляет 40%. При умеренной физической нагрузке через легкие человека проходит 15 л воздуха за 1 мин. Выдыхаемый воздух имеет температуру 34 °C и относительную влажность 100%. Давление насыщенного водяного пара при 20 °C равно 2,34 кПа, а при 34 °C – 5,32 кПа. Какую массу воды теряет тело человека за 1 ч за счет дыхания? Считайте, что объем выдыхаемого воздуха равен объему, который проходит через легкие человека. Влажность воздуха в комнате считайте неизменной.

28. На рисунке 17 показана схема устройства для предварительного отбора заряженных частиц, вылетающих из источника частиц (и.ч.), для последующего детального исследования. Устройство представляет собой конденсатор, пластины которого изогнуты дугой радиусом R. При первоначальном напряжении U в промежутке между обкладками конденсатора, не касаясь их, пролетают молекулы интересующего исследователей вещества, потерявшие один электрон. Во сколько раз нужно изменить напряжение на обкладках конденсатора, чтобы сквозь него могли пролетать такие же, но дважды ионизированные молекулы (потерявшие два электрона), имеющие такую же скорость? Считайте, что расстояние между пластинами мало, напряженность электрического поля в конденсаторе всюду одинакова по модулю, а вне конденсатора электрическое поле отсутствует. Влиянием силы тяжести можно пренебречь.

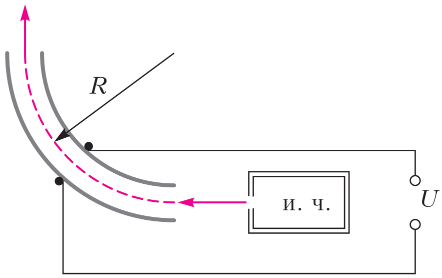


Рис. 17

29. Точечный источник света S расположен на расстоянии 40 см от оптического центра тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием 0,2 м на ее главной оптической оси AB (рис. 18). При повороте линзы на угол α относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через ее оптический центр, изображение источника сместилось вдоль прямой AB на 10 см. Определите угол поворота линзы. Сделайте пояснительный чертеж, указав ход лучей в линзе для обоих случаев ее расположения.

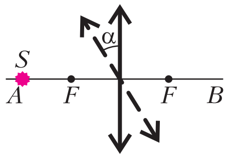


Рис. 18

30. На горизонтальном столе находится брусок массой $M = 1$ кг, соединенный невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через гладкий невесомый блок, с грузом массой $m = 500$ г. На брусок действует сила $\vec{F}$, направленная под углом $\alpha = 30°$ к горизонту (рис. 19), $F = 9$ Н. В момент начала движения груз находился на расстоянии $L = 32$ см от края стола. Какую скорость v будет иметь груз в тот момент, когда он поднимется до края стола, если коэффициент трения между бруском и столом $\mu = 0,3$? Сделайте схематический рисунок с указанием сил, действующих на брусок и груз. Обоснуйте применимость законов, используемых для решения задачи.

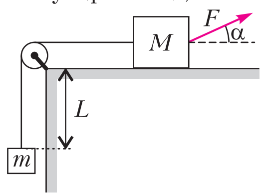


Рис. 19

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Публикацию подготовили
М.Демидова, А.Черноуцан

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ПОЛИТЕХНИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Политехническая олимпиада школьников в 2021/22 учебном году проводилась по четырем предметам: математике, физике, химии и информатике. Отборочный тур проходил заочно с применением интернет-технологий. Участники выполняли задания тура на официальном сайте олимпиады. Победители и призеры отборочного тура были приглашены к участию в заключительном туре по математике, физике и химии, который прошел в Санкт-Петербургском политехническом университете в форме очного письменного испытания. Заключительный тур по информатике проводился дистанционно с применением интернет-технологий.

Ниже приводятся задачи обоих туров по математике, физике и информатике.

Информацию об олимпиаде 2022/23 учебного года можно получить на сайтах СПбПУ: www.spbstu.ru, school.spbstu.ru и olymp.spbstu.ru

Математика

Отборочный тур

1. Найдите наибольший простой делитель числа $116 \cdot 98 + 81$.

2. Первый и второй работники, работая одновременно, могут выполнить работу за 42 часа, второй и третий – за 35 часов, третий и первый – за 21 час. За сколько часов одновременной работы справятся с заданием три работника?

3. Найдите центр симметрии графика функции $y = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}$. В ответе укажите сумму координат этой точки.

4. Найдите количество решений неравенства $|\sin 4x - \sin 16x| + \sin 4x \cdot \sin 16x \le 0$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

5. Радиусы описанной и вписанной окружностей равнобедренного треугольника равны 18 и 5 соответственно. Найдите наибольшее возможное значение высоты этого треугольника.

6. В лыжный поход идут 13 человек. Среди любых четырех участников похода хотя бы один знаком с остальными тремя. Перед походом встретились все лыжники из этих 13 человек, знакомые со всеми участниками похода. Какое минимальное количество лыжников может содержать эта группа?

7. Около шара описана правильная усеченная четырехугольная пирамида. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если высота боковой грани равна 4.

8. Решите неравенство

$$\left(x^2 - 6x + 5\right)\sqrt{x^2 - 10x + 24} \le 0.$$

В ответе укажите сумму наименьшего и наибольшего положительных решений.

9. Найдите такое натуральное число n, что числа $n + 14$ и $n + 66$ являются квадратами натуральных чисел.

10. Класс выбирает старосту. Выдвинуты 4 кандидата. Каждый школьник в бюллетене для тайного голосования отмечает одного кандидата. Сколькими способами могут распределиться голоса, если в классе 22 школьника?

Заключительный тур

1. Пусть n – двузначное натуральное число, которое дает остаток 8 при делении на 11, m – число, полученное из n перестановкой цифр. Найдите остаток от деления числа $16n + 10m$ на 11.

2. Решите неравенство $x^2 - xy + y^2 + x + y \le -1$.

3. Пусть $z = \min\left\{\sqrt[m]{n}, \sqrt[n]{m}\right\}$, где n, m – натуральные числа, большие 3. Найдите наибольшее значение z.

4. При каком значении a график функции $y = x^4 + ax^3 + x$ имеет ось симметрии, параллельную оси Oy?

5. Длина стороны AB треугольника ABC равна 20. Найдите площадь треугольника, если вписанная окружность имеет радиус 4 и касается окружности, построенной на AB как на диаметре.

6. Найдите количество целых решений неравенства $\dfrac{\sin\left(x\left|x - \dfrac{9\pi}{2}\right| + x^2\right)}{\sqrt{72 - x^2}} > 0$.

7. Из двух городов навстречу друг другу одновременно отправились поезда. Пройдя треть пути, первый поезд остановился на 40 минут. Возобновив движение, он через 21 минуту встретил второй поезд. Поезда прибыли в пункты назначения одновременно. Сколько минут был в пути второй поезд? (Поезда двигались с постоянными скоростями.)

8. Из емкости с 98%-м раствором кислоты отлили 1 л раствора и долили 1 л воды. Затем отлили 3 л раствора и долили 3 л воды. Концентрация снизилась до 48%. Найдите объем емкости.

9. Решите уравнение

$$\frac{1}{x\sqrt{x-1} + (x-1)\sqrt{x}} = \frac{5 - 2\sqrt{x}}{2x}.$$

10. Значение некоторого ненулевого многочлена с единичным старшим коэффициентом в любой целой точке делится на 162. Какова наименьшая степень такого многочлена?

Физика

Отборочный тур

Каждая задача этого тура оценивалась в 10 баллов.

1. Анализируя свои еженедельные поездки из Северного Хмурина к родителям в Южное Забытово, студент Недоедов обнаружил, что он треть времени идет пешком со средней скоростью $v_1 = 4{,}8$ км/ч, треть пути проезжает на маршрутках со средней скоростью $v_2 = 38$ км/ч, а еще $s_3 = 28$ км по городу – на метро за $t_3 = 40$ мин. Однажды в поезде Недоедов задумался, на сколько меньше времени занимала бы поездка, если бы метро везло его от дверей до дверей. А действительно, на сколько?

2. Мальчики-тройняшки построили плот. Когда они забрались на плот все вместе, плот погрузился в воду полностью. А вот если кататься вдвоем, то плот погружается в воду на $\eta = 0{,}82$ своей толщины. Определите плотность дерева, из которого сделан плот. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

3. Участники снежной битвы бросают друг в друга снежки, находясь в окопах, так что бросок происходит с уровня земли. Два одинаковых снежка были брошены навстречу друг другу один под углом $\alpha_1 = 44°$, а другой под углом $\alpha_2 = 59°$ к горизонту. Снежки столкнулись и слиплись на высоте $H = 6{,}1$ м в высших точках своих траекторий. На каком расстоянии от первого бросавшего упадет образовавшийся снежок?

4. В одном из испытаний Форта Боярд контейнер с подсказкой плавал внутри длинной трубки сечением $S = 24$ см^2, погруженной в бочку с водой так, что ее верхний конец находится на высоте $h = 15$ см над водой. Чтобы получить подсказку, игроки должны налить в трубку ровно столько масла, сколько нужно, чтобы подсказка всплыла к краю трубки. В противном случае подсказка сгорает. Сколько литров масла следует налить в трубку? Плотность масла $\rho = 850$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

5. В двух баллонах, объемом $V = 350$ см^3 каждый, содержится воздух при атмосферном давлении. Разрежающими поршневыми насосами из баллонов начинают откачивать воздух. Во сколько раз давление p_1 в первом баллоне после шести ходов поршня насосом емкостью $\Delta V = 45$ см^3 меньше давления p_2 во втором баллоне после одного хода поршня насоса емкостью $6\Delta V$? Процесс считать изотермическим.

6. В калориметр со льдом при температуре $t_1 = -16$ °C вводят $m_2 = 115$ г водяного пара при температуре $t_2 = 100$ °C. Какую наибольшую массу льда можно расплавить таким количеством пара? Теплоемкостью калориметра можно пренебречь. Теплоемкость воды 4,2 кДж/(кг · К), теплоемкость льда 2,1 кДж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды 2,26 МДж/кг, удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг.

7. Три одинаковых маленьких медных шарика закреплены на одной прямой. Расстояния между центральным и крайними одинаковы и равны $r = 10$ см (рис. 1). Заряд первого шарика $q_1 = +2{,}2$ нКл, второго $q_2 = +4{,}0$ нКл, третьего $q_3 = +2{,}6$ нКл. Сначала на короткое время тонкой проволокой соединяют первый шарик со вторым, затем второй с третьим, а потом первый с третьим, после чего проволоку убирают. Найдите величину силы, действующей после этого на первый шарик со стороны двух других. Расстояние между шариками много больше их размеров.

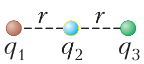


Рис. 1

8. Схема содержит две одинаковые батареи с внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом (рис. 2). В начальный момент времени ключ замкнут на контакт 1 и вольтметр показывает напряжение U_1. Найдите, во сколько раз изменятся показания вольтметра U_2/U_1, если ключ перевести в положение 2. Вольтметр и диоды считать идеальными, $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $R_3 = 5$ Ом.

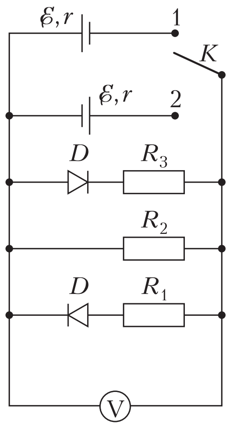


Рис. 2

9. Воспользовавшись хорошей погодой во время перехода «Наутилуса» по Аравийскому морю, капитан Немо распорядился всплыть и проветрить подводную лодку, а команде разрешил подняться на открытую палубу. Прогуливаясь по ней, профессор Аронакс заметил, что волны ударяют о нос лодки десять раз за $t_1 = 44{,}8$ с. Когда лодка поплыла навстречу волнам, это время сократилось до $t_2 = 18{,}4$ с. Каким было бы это время, если бы «Наутилус» поплыл с той же скоростью в обратном направлении?

10. Док Браун, экспериментируя в гараже с привезенным из будущего аэрогелем, изготовил из него клин. Посветив на клин под водой лазерной указкой, направленной перпендикулярно боковой грани, профессор заметил, что луч отклонился на угол 22° от своего первоначального направления. Вытащив клин из воды, он повторил свой опыт уже на воздухе. Оказалось, что отклонение луча опять равно 22°. Чему равен показатель преломления материала клина? Показатель преломления воды принять равным 1,33, показатель преломления воздуха равен 1,00.

Заключительный тур

1. Как известно, вороны очень сообразительные и игривые птицы. Однажды две вороны уселись на конек двухскатной несимметричной крыши, угол между скатами которой был равен 90° (рис. 3). Из точки на коньке они одновременно отпустили два небольших камушка: одна ворона по левому скату крыши, вторая по правому. Как будет зависеть от времени модуль относительной скорости камушков, если их формой и размерами можно пренебречь, а скаты крыши считать гладкими? (10 баллов)


Рис. 3

2. К одному концу нити, перекинутой через блок, подвешен цилиндрический груз, частично погруженный в стакан с жидкостью (рис. 4). Площадь поперечного сечения стакана равна 16 см^2. Система приведена в равновесие при помощи противовеса массой 72 г, находящегося на другом конце нити. После того, как на нить повесили второй груз той же массы, уровень жидкости в сосуде понизился на 5 см. Чему равна плотность жидкости? (15 баллов)

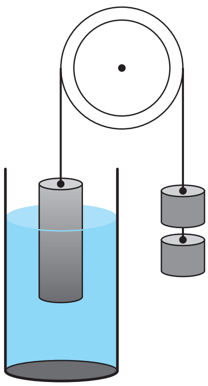


Рис. 4

3. Шар массой $m = 100$ г подвешен на нити. Его отклонили на угол α ($\cos\alpha = 0{,}4$) от положения равновесия и отпустили (рис. 5).

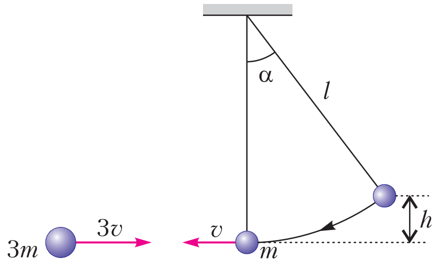


Рис. 5

При прохождении положения равновесия шар массой m испытал центральное абсолютно неупругое столкновение с движущимся навстречу шаром массой $3m$. Скорость шара массой $3m$ до удара в три раза превышала скорость, которую набрал первый шар перед ударом. Найдите силу натяжения нити в момент прохождения шарами начального положения первого шара. (20 баллов)

4. Жилой дом обогревается двухблочным кондиционером, работающим в режиме теплового насоса и потребляющим 1,5 кВт электроэнергии. Его эффективность в 5 раз меньше, чем у идеальной тепловой машины, работающей по обратному циклу Карно в тех же условиях. Из-за теплопроводности стен и окон тепло из дома уходит со скоростью, пропорциональной разнице температур в доме и на улице с коэффициентом пропорциональности 400 Вт/К. Чему равна температура на улице, если температура в помещении +27 °С? (20 баллов)

Примечание. Тепловой насос – машина, забирающая тепло при низкой температуре (у холодильника) и отдающая его при высокой (нагревателю) за счет совершения внешними силами работы. Эффективность теплового насоса в режиме обогрева рассчитывается как отношение полученного нагревателем количества теплоты к совершенной внешними силами работе, в данном случае – к затраченной электроэнергии.

5. Три тонких очень длинных параллельных проводника лежат в одной плоскости

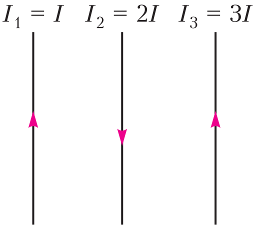


Рис. 6

(рис. 6). Расстояния между средним и крайними одинаковы. По проводникам текут токи, величина и направление которых указаны на рисунке. Определите величину и направление сил, действующих на второй и третий проводники, если сила, действующая на первый (левый) проводник равна F. (15 баллов)

Примечание. Принять во внимание, что величина магнитного поля прямого тока пропорциональна силе тока и обратно пропорциональна расстоянию до него.

6. На главной оптической оси OO' тонкой линзы имеются три замечательные точки A, B, C, причем $AB = BC = L$ (рис. 7). Если точечный источник света поместить в любую из точек, изображение оказывается в одной из двух других. Найдите фокусное расстояние линзы, если $L = 18$ см. (20 баллов)

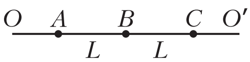


Рис. 7

Информатика

Отборочный тур

Избранные задачи

1. Во время игры «Тайный Санта» первокурснику Сидорову достался профессор Кусацкер, математик. Этот… эээ… почтенный преподаватель попросил у Санты натуральное число (небольшое такое, в пределах миллиона), число делителей которого нечетно и делится без остатка на 117. С помощью математики Сидоров найти такое число не смог. А вот с помощью программирования число нашлось. Найдите и вы такое число (если их несколько, ответом будет наименьшее).

2. – Сколько мне полных лет? Ну… мне несколько больше, чем 59, но не больше, чем 91.

– Извините, пожалуйста, это не сайт знакомств, это поликлиника. Вы не могли бы уточнить свой возраст?

– Мой возраст, записанный в двоичной системе счисления, является палиндромом! И больше я вам ничего не скажу!

Определите минимальный возможный возраст дамы и определите, сколько бит информации получил сотрудник регистратуры из ее слов про палиндром.

3. Отметьте верные утверждения.

А. Python (Питон) получил свое название из-за возможности писать длинные «змеевидные» последовательности вложенных вызовов функций.

Б. Количество цветов в палитре точечного рисунка прямо пропорционально количеству битов, отводимых на один пиксель.

В. При выполнении поискового запроса Google последовательно открывает сайты сети интернет и ищет совпадения.

Г. Растровое изображение, в отличие от векторного, искажается при масштабировании.

Д. У любых двух последовательных двоичных натуральных чисел последние цифры различны.

Е. Если задумано натуральное число от 1 до 8, то ответ на вопрос «Это число меньше 3?» менее информативен, чем на вопрос «Это число меньше 5?».

Ж. Текстовый файл, созданный в Блокноте, не содержит ничего, кроме кодов символов.

З. Вычислительная машина Чарльза Бэббиджа программировалась на языке Алгол.

4. Вам наверняка известна традиция предсказания погоды с помощью сурков. Глава корпорации РосДубАтом Александр Сергеевич решил с помощью своего попугая определить, какая прибыль ждет его организацию в конце текущего года. Для этого он написал программу-калькулятор. Действий всего 5, совершаются они по нажатию кнопок 1–5 на клавиатуре, каждое вычисляет значение какой-то квадратичной функции от числа на экране. Например, если при нажатии на кнопку 1 калькулятор вычисляет значение квадратичной функции y = 4 * x2 + + 3 * x + 2 и до этого калькулятор показывал число –1, то после нажатия на кнопку 1 на экране появится число $4*(-1)*(-1)+$ $+3*(-1)+2=3$. После того, как Александр Сергеевич написал свой первый в жизни калькулятор, он положил на каждую из пяти обрабатываемых программой клавиш по одной семечке и выпустил своего попугая Аркашу. Аркаша – серьезный современный попугай, пустые клавиши не клюет, семечки склевывает одним ударом. А вот в каком

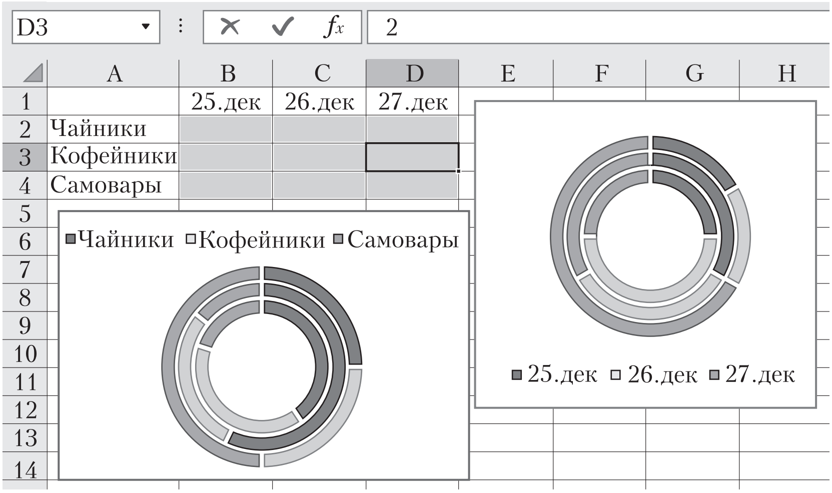


Рис. 8

порядке… Определите максимальную возможную прибыль, которую может нагадать попугай, если до появления Аркаши калькулятор показывал число –1, а Александр Сергеевич в своем калькуляторе использовал следующие квадратичные функции:

$$y = x^2 + x,$$
$$y = -2x^2 - x + 1,$$
$$y = x^2 + 4x + 4,$$
$$y = -2x^2 - 1,$$
$$y = 2x^2 - x - 1.$$

5. Буся и Дуся делают проекты, связанные с распознаванием образов. Для обучения нейронной сети им нужно много графических файлов в формате BMP (точечный рисунок). Буся делает цветные файлы размером 100 на 100 пикселей, а Дуся – черно-белые, 400 на 400. Сколько цветов в палитре у Буси, если 64 ее картинки после загрузки в память компьютера занимают столько же места, сколько 16 картинок Дуси?

6. Сидящие за последней партой Буся и Дуся во время урока географии незаметно для учителя обмениваются впечатлениями о своих одноклассниках. Сообщения их состоят из чисел, в каждом – номер колонки (1–3), номер парты (1–5), номер варианта (1–2) и оценка качества юноши, сидящего на обозначенном месте, по десятибалльной шкале. Для кодирования чисел при передаче сообщений применяется унарная система счисления: число передается серией пинков по ноге соседки под партой, какое число – столько и пинков. Серии разделены короткими паузами. К примеру, если бы Буся решила сообщить Дусе, что мальчик, сидящий за 4-й партой 1-й колонки на 2-м варианте – так себе, на 5, Дуся получила бы 1 + + 4 + 2 + 5 = 12 пинков. Каким может быть минимальное количество полученных Бусей пинков в ходе монолога Дуси о 9 одноклассниках?

7. По таблице с данными о продаже продукции ИП «Жесть» были составлены две диаграммы (рис. 8). Определите минимальное количество изделий, которое могло быть продано 26 декабря.

Заключительный тур

1. Пятеро друзей из детсада для особо одаренных детей решили разработать игру «Морской бой» – человек против компьютера, консольное приложение. Нужно сохранять в памяти данные о расстановке кораблей. Напомним: поле 10 на 10 клеток, корабли – цепочки смежных клеток, расположенные по вертикали или горизонтали (не изгибаются). У игрока один 4-клеточный корабль, два 3-клеточных, три 2-клеточных, четыре 1-клеточных. Корабли не пересекаются и не соприкасаются. Представление должно позволять проверять результаты «выстрела» и воспроизводить расположение кораблей средствами символьной графики.

Были предложены следующие способы кодирования кораблей.

- Битовая карта: 1 означает, что клетка входит в какой-либо корабль, 0 – ни в какой корабль не входит, все поле – последовательность битов (Андрей).
- Хранить координаты всех клеток, которые входят в какой-либо корабль, координата – байт (Боря).
- Сохранять данные о кораблях: количество клеток – байт, и координаты левой верхней клетки – по байту на каждую координату (Вася).
- Координаты первой и последней клетки каждого корабля, при этом применить поби-

товое кодирование, отводя на каждую координату минимальное количество бит (Гоша).

Упорядочите все способы, позволяющие однозначно воспроизвести расстановку, по возрастанию памяти на хранение данных о расстановке всех кораблей игрока. В качестве ответа введите первые буквы имен их авторов без пробелов.

2. Задумано натуральное число из интервала от 10 до 33 включительно. Имеются следующие высказывания о задуманном числе:

A = {задуманное число – простое}

B = {обе цифры числа четные}

C = {в двоичном представлении числа ровно 3 единицы}

D = {является степенью натурального числа}

E = {первая цифра числа меньше второй}

F = {делится на 3}

G = {содержит цифру 7}

Какие из перечисленных ниже высказываний, будучи истинными, несут ровно 3 бита информации о задуманном числе? And, Or, Not – логические операции И, ИЛИ, НЕ.

А. A And Not(E And Not G)

Б. A And C

В. B And F And E

Г. C And Not D

Д. Not E And A Or A And G

3. Значение функции $y = f(x)$ вычисляется следующим образом:

- $f(x) = x + 1$, если $x <= 5$
- $f(x) = 2 * x + f(x - 4)$, если $x > 5$ и является четным числом
- $f(x) = f(x + 2) - x$, если $x > 5$ и является нечетным числом

Для какого минимального натурального x можно вычислить значение функции $f(x)$, причем получающееся значение больше 120?

4. Сонечка и Тонечка спорили в твиттере о том, что круче: поп-ит или симпл-димпл.

– Я тебя по IP вычислю! – сказала Сонечка в завершение спора и попросила старшего брата определить IP-адрес своего оппонента.

Старший брат адрес Тонечки, конечно, вычислил, но так просто отдать его Соне не захотел: он перевел числа IP-адреса в двоичную систему счисления, записал друг за другом подряд (без ведущих нулей и без точек) и вручил Соне с напутствием, что в свободное время надо информатику учить, а не в интернетах споры разводить. Какое количество IP-адресов в худшем случае придется проверить Сонечке, если Сонечка действительно засядет за информатику, а старший брат передал ей в качестве IP-адреса следующий набор бит:

$$1100000010000111001100100 0?$$

На всякий случай: Сонечка ничего не знает про специальные типы IP-адресов, так что любой подходящий под набор бит IP-адрес будет ею проверен.

5. Операция СП (Сломать и Переставить) над натуральным числом выполняется так: число записывается в двоичной системе счисления, разбивается на 2 части по границе между цифрами, части меняются местами и склеиваются, полученное двоичное число переводится обратно в десятичную систему. Например, результатом операции СП над числом 13 (1101_2) могут оказаться числа 11 (1011_2), 7 (0111_2), 14(1110_2).

Студент Политеха Дуболомов во время сдачи зачета по физвоспитанию выполнил СП-операцию над всеми числами из интервала от A до B включительно. Самым маленьким из получившихся у него в результате чисел было число 3, а самым большим – число 229. Определите минимальную возможную разность между B и A.

6. Вопрос – на перфоленте (рис. 9). Ответ – символ.

Публикацию по математике подготовили И.Комарчев, А.Моисеев, А.Одинцов, С.Преображенский; по физике – Т.Андреева, С.Старовойтов; по информатике – Е.Крылова, К.Плотникова

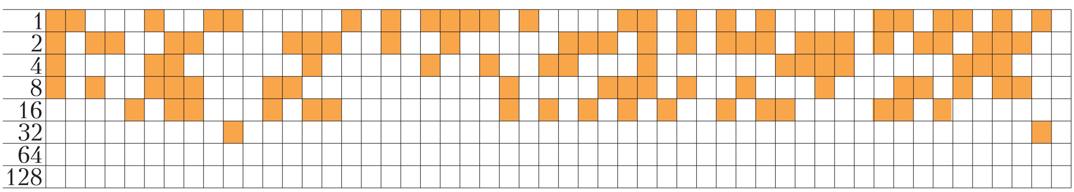


Рис. 9

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №8)

1. Возможные решения показаны на рисунке 1.

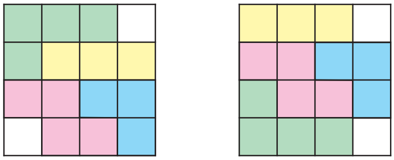


Рис. 1

2. Например, $674 \cdot 3 = 2022$ или $45^2 - 3 = 2022$.

3. Нет.

Разрезая круг по границам между полными и худыми, разобьем всех поваров на группы одной комплекции, сидящих подряд. Заметим, что групп полных столько же, сколько групп худых, пусть тех и других по n. Если огорченных нет, то в каждой группе полных не более двух поваров, а в каждой группе худых – не менее двух поваров. Тем самым полных поваров не более $2n$, худых – не менее $2n$. Если худых и полных поваров поровну, то их по $2n$. Но тогда каждая группа состоит из двух поваров, каждый из них сидит между худым и полным, поэтому нет повода радоваться.

4. Нет.

Предположим, что можно, тогда полученный четырехугольник может оказаться выпуклым или невыпуклым. Рассмотрим оба случая, изображая зигзаги линиями разного цвета.

1) Пусть из зигзагов $ABDC$ и $BCAD$ получился выпуклый четырехугольник $ABCD$ (рис. 2). Можно рассуждать по-разному.

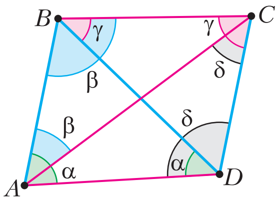


Рис. 2

Первый способ. Обозначим углы при основаниях в четырех равнобедренных треугольниках так, как показано на рисунке. Тогда $\alpha > \beta > \gamma > \delta > \alpha$. Противоречие.

Второй способ. В четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны попарно равны, значит, это параллелограмм. Но одна из его диагоналей лежит напротив неострого угла, поэтому она больше каждой стороны параллелограмма. Следовательно, хотя бы одна из ломаных $ABDC$ или $BCAD$ не является зигзагом.

Третий способ. В четырехугольнике $ABCD$ выполнено равенство $AC + CD = AD + DB$. Но сумма диагоналей выпуклого четырехугольника больше его полупериметра (для обоснования этого факта достаточно записать неравенство треугольника для каждого из четырех треугольников, на которые $ABCD$ разбивается диагоналями, и эти неравенства сложить).

2) Пусть из зигзагов $ADCB$ и $CABD$ получился невыпуклый четырехугольник $ABCD$ (рис. 3).

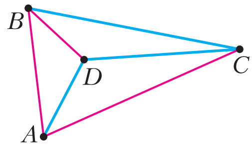


Рис. 3

Тогда углы ADB и CDB – это углы при основании у двух равнобедренных треугольников. Значит, эти углы острые, тогда их сумма меньше 180°, что противоречит тому, что $ABCD$ – невыпуклый.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Формула препарата $C_8H_9NO_2$; относительная молекулярная масса $8 \cdot 12 + 9 \cdot 1 + 14 + 2 \cdot 16 = 151$; молярная масса 151 г/моль.

2. Например, увеличить поверхность, на которой происходит реакция, или интенсивно перемешивать раствор с реагентами.

3. Форму куба имеют кристаллы поваренной соли ($NaCl$), форму октаэдра – кристаллы алмаза (C). Пирит (FeS_2) встречается в форме куба, октаэдра, додекаэдра или икосаэдра. Кристаллов-тетраэдров в природе нет, однако *молекула* метана (CH_4) имеет форму тетраэдра (атомы водорода находятся в вершинах, атом углерода – в центре).

4. При плавлении упорядоченное расположение атомов переходит в неупорядоченное. Атомы углерода в чугуне нарушают правильность строения решетки кристаллов железа, поэтому их присутствие облегчает переход тела из твердого состояния в жидкое.

5. Так как плотность яйца несколько больше плотности раствора, то оно вначале тонет. Однако на поверхности яйца начинается химический процесс между скорлупой и соляной кислотой, в результате чего образуется углекислый газ, пузырьки которого, приставая к скорлупе, поднимают яйцо вверх. На поверхности воды пузырьки срываются и уходят в воздух, яйцо снова погружается на дно, затем все повторяется, пока не растворится скорлупа.

6. В этом случае вода превратилась бы в идеальный газ с плотностью жидкой воды. Расчет по уравнению Менделеева–Клапейрона дает величину давления в 1400 атмосфер! Эта гигантская величина показывает, сколь велики силы молекулярного «сцепления», действующие на расстояниях в доли нанометра в жидкостях и твердых телах.

7. Это – оксид азота NO.

8. Установится давление $\frac{2}{3}p_0$. Согласно уравнению реакции $2H_2 + O_2 = 2H_2O$, кислород и водород в данном случае прореагируют полностью, без остатка. При этом из трех молей получаются два моля газа.

9. Нет, потому что диссоциирующая молекула электрически нейтральна – «состоит» из ионов разных знаков.

10. Если между проводами есть постоянное напряжение, в воде начнется электролиз и на проводах будут выделяться пузырьки кислорода и водорода (кстати, на каком проводе будет выделятся больше и какого газа?).

11. Обычная вода – электролит, поэтому образуется гальваническая пара алюминий–медь. При действии этого «элемента» и происходит растворение металла (алюминия) и выделение водорода на меди.

12. Лучи, близкие к фиолетовому концу спектра, химически более активны, но они хуже проходят через желтое стекло.

13. При работе кварцевых ламп возникает ультрафиолетовое излучение, действие которого на кислород воздуха приводит к образованию озона.

14. Необходимо провести ядерную реакцию. В природе существует один стабильный изотоп золота – ^{197}Au и семь изотопов ртути – ^{196}Hg, ^{198}Hg, ^{199}Hg, ^{200}Hg, ^{201}Hg, ^{202}Hg, ^{204}Hg. Значит, в ходе ядерной реакции из ядра ртути необходимо удалить один протон и либо добавить нейтрон, либо удалить один, два, три, четыре, пять или семь нейтронов.

Микроопыт

Растворение соли в воде – процесс *химический* ($NaCl = Na^+ + Cl^-$). Плотность раствора растет, увеличивается и действующая на яйцо выталкивающая сила (закон Архимеда – основной *физический* закон гидростатики). Ее рост и приводит к всплытию яйца.

Расстановки по кругу и арифметика остатков

3. Задача Пети выполнима.

Указание. Эту задачу можно «раскрутить» с конца, постепенно анализируя, в какой ситуации Петя выиграет за один ход, за два хода и т.д. Читатель может не отказать себе в удовольствии провести такое рассуждение.

Можно также занумеровать лунки остатками 0, 1, 2, …, 15 при делении на 16 так, чтобы отмеченная лунка имела номер 0. Тогда стратегию Пети можно описать совсем просто: когда шарик находится в лунке m, пусть Петя называет число m. Советуем также подумать над этой задачей не только для 16 лунок, а для всех других количеств; начать можно с 10, например.

4. *Указание*. Занумеруйте точки остатками при делении на $4n$. Докажите, что каждая хорда соединяет вершины, соответствующие остаткам разной четности.

7. Предположим противное. Тогда между двумя соснами не может быть ровно двух деревьев. Таким образом, граф запретов образован прыжками 3-кузнечика. По задаче о бусах для $n = 2019$, $d = 3$, красных бусин (т.е. сосен) не более $3\cdot[2019/6] = 3\cdot 336 = 1008$. Получаем противоречие.

8. 4, 8, 12, 16.

Предположим, что такой диагонали не найдется. Тогда запрещенные диагонали образуются прыжками k-кузнечика. Мы должны получить противоречие с тем, что зеленых вершин с одной стороны 9, а с другой стороны – по задаче о бусах – их не более $d\cdot[20/(2d)]$, где $d = \text{НОД}(n,k)$. Таким образом, нас интересует, при каких d выполнено неравенство $9 > d\cdot[10/d]$. Если число $10/d$ целое, то $d\cdot[10/d] = d\cdot 10/d = 10$. Значит, этот случай нас не интересует. Следовательно, d – это делитель числа 20, который не является делителем числа 10; подходит только $d = 4$. Тогда действительно $9 > 8 = 4\cdot[10/4]$. Осталось выяснить, при каких k окажется $\text{НОД}(20,k) = 4$. Это все k, кратные 4, т.е. 4, 8, 12, 16.

9. $n-1$, когда $n+1$ кратно 3, и n – иначе.

Найдем наибольшее $b-1$, при котором раскраска может не быть хорошей. Тогда ответом в задаче будет число b. Граф запретов здесь образуется прыжками $(n+1)$-кузнечика. Его структура будет зависеть от $d = \text{НОД}(n+1, 2n-1) = \text{НОД}(n+1, -3)$.

По задаче о бусах, максимальное количество черных точек равно $b - 1 = d\cdot[(2n-1)/(2d)]$.

Так как d – это делитель числа 3, то достаточно перебрать два варианта.

При $d = 1$, т.е. когда $n+1$ не кратно 3, получим $b = 1\cdot[(2n-1)/2] + 1 = n$.

При $d = 3$, т.е. когда $n+1$ кратно 3, получим $b = 3\cdot[(2n-1)/6] + 1$. Так как $2n-1$ делится на $d = 3$, то оно делится на 6 с остатком 3. Поэтому $b = 3\cdot(2n-4)/6 + 1 = n - 1$.

10. 8 рублей.
Поскольку $20 \equiv 15 \cdot 8 \pmod{100}$, то 15-кузнечику на 100-окружности надо будет сделать 8 прыжков по часовой стрелке, чтобы попасть из 0 в 20. Длина цикла при этом равна $100/\text{НОД}(15,100) = 100/5 = 20$. Значит, чтобы прийти из 0 в 20, двигаясь против часовой стрелки, потребуется $20 - 8 = 12$ прыжков – это более длинный путь.
11. а) x кратен 24; б) x сравним с 5 по модулю 24; в) x кратен 5; г) 6.
а) Этот вопрос аналогичен следующему: через сколько прыжков по часовой стрелке 5-кузнечик на 24-окружности вернется в точку 0, с которой начал? Так как цикл длины 24, то кузнечик будет возвращаться в 0 каждые 24 прыжка.
б) Здесь речь идет о том же кузнечике. Впервые он попадет из 0 в 1 через 5 прыжков, так как $5 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{24}$. Далее он будет возвращаться туда через каждый полный проход цикла, т.е. каждые 24 прыжка.
в) Снова переформулируем вопрос: через сколько прыжков 12-кузнечик на 30-окружности сможет вернуться в точку 0? Длина цикла равна 5, поэтому кузнечик будет возвращаться в 0 через каждые 5 прыжков.
г) Переформулировка: в какую ближайшую точку (от 0 по часовой стрелке) сможет попасть кузнечик? В цикле кузнечика будут находиться все точки с номерами, кратными 6.
12. Рассмотрим граф прыжков 5-кузнечика – он представляет собой 5 пятиугольников. В каком-то из них будет 3 красные вершины. Нетрудно проверить, что любые 3 вершины правильного пятиугольника образуют равнобедренный треугольник.
13. *Указание*. Рассмотрите правильный пятиугольник, вписанный в эту окружность.
14. 78.
Стороны такого треугольника стягивают дуги, на которых уложено по 12, 54 и 54 стороны. Рассмотрим граф прыжков 54-кузнечика. Он представляет собой 6 циклов длины 20. Если среди вершин цикла хотя бы 14 отмеченных, то какие-то три из них идут подряд (докажите это), а значит, образуется искомый треугольник. При этом для 13 отмеченных вершин это уже неверно. Поэтому ответ $13 \cdot 6 = 78$.
15. 40.
Указание. Для доказательства оценки можно в графе запретов выделить короткие нечетные циклы.
Пронумеруем все точки подряд числами от 1 до 101 так, чтобы точка номер 101 была красной. Оставшиеся 100 точек разобьем на 20 групп по 5 точек: с номерами x, $x+20$, $x+40$, $x+60$, $x+80$, где x от 1 до 20. Каждая такая группа образует пятиугольник в графе запретов – между соседними по кругу точками 19 или 20 других точек, значит, в каждой группе не более двух синих точек. Отсюда получается, что всего точек не более $2 \cdot 20 = 40$. Пример, когда синих точек ровно 40, возможен: пусть это точки с номерами с 1 по 20 и с 51 по 70.
16. *Указание*. Возьмите окружность длины 300 и разделите ее на 101 дугу с длинами, равными массам гирек.
17. В начальной.
Как обычно, пронумеруем вершины, начальной вершине дадим номер 0. В итоге кузнечик попадет в вершину, номер которой сравним с $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$ по модулю n, т.е. в 0.
19. Пусть $(n-1)$-я перевернутая монета – X, а n-я – Y. Тогда между X и Y по часовой стрелке лежат $n-1$ монет, а раз всего монет в круге $2n+1$, то между Y и X по часовой стрелке лежат n монет. Это значит, что $(n+1)$-ой мы снова перевернем монету X.
И далее мы будем переворачивать уже переворачивавшиеся монеты, но в обратном порядке: ведь пропустить по часовой стрелке $n+1$ монет – все равно, что пропустить против часовой стрелки $n-2$ монеты, …, пропустить по часовой стрелке $2n-2$ монеты – все равно, что пропустить против часовой стрелки 1 монету. А на последних двух шагах мы перевернем одну и ту же монету.
В итоге решкой вверх будет лежать только монета Y – она переворачивалась нечетное число раз, а все остальные монеты – четное.
23. 670.
Указание. Рассмотрите перестановку, соответствующую умножению номера точки на 2.

Избранные задачи XXVII Турнира имени А.П. Савина

(см. «Квант» №8)

1. Верно.
Упорядочим числа на доске: $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$. Среди них не может быть двух отрицательных, иначе их сумма была бы отрицательна, а все модули разностей неотрицательны. Рассмотрим два случая.
1) На доске нет отрицательных чисел. Максимальное число у Розы равно $a_1 - a_n$. Поскольку Симино число $a_1 + a_2$ записано у Розы, то $a_1 + a_2 \leq a_1 - a_n$. Такое может быть только в случае, когда $a_2 = a_n = 0$, а значит, и все числа между ними равны 0. Таким образом, на доске записаны числа a_1, 0, 0, …, 0. Если $a_1 = 0$ или $n = 2$, то у Симы с Розой записано только число

a_1, в противном случае у обеих записаны числа a_1 и 0.

2) На доске одно отрицательное число: $a_n = -b$, где $b > 0$. Число $a_{n-1} + a_n = a_{n-1} - b$ записано у Симы, а значит, записано и у Розы, поэтому $a_{n-1} \geq b$. Максимальное число у Розы равно $a_1 - a_n = a_1 + b$. Поскольку Симино число $a_1 + a_2$ записано у Розы, то $a_1 + a_2 \leq a_1 + b$, откуда $a_2 \leq b$. Но так как $a_2 \geq a_{n-1}$, то такое возможно, только если $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = b$. Таким образом, на доске записаны числа $a_1, b, b, \ldots, b, -b$. Если $a_1 = b$, то и у Симы, и у Розы записаны числа $2b$ и 0, а если $a_1 \neq b$, то $n > 3$ (иначе у Симы есть число 0, а у Розы этого числа нет) и у обеих записаны числа $a_1 + b$, $a_1 - b$, $2b$, 0.

2. Отразив прямоугольные треугольники ABM и EDM относительно своих гипотенуз, получим равные им треугольники KBM и LDM соответственно (рис. 4). Заметим, что $\angle CBK = \angle CBM - \angle ABM = 90°$ и, аналогично, $\angle CDL = 90°$, поэтому если N – точка пересечения прямых BK и DL, то $BCDN$ и $KMLN$ – прямоугольники.

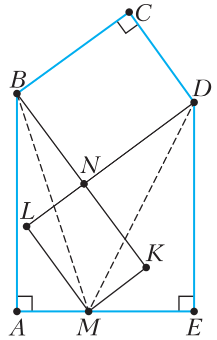


Рис. 4

Отсюда получаем $AB = KB = BN + NK = CD + LM = CD + EM$. Аналогично, $ED = CB + AM$, а из этих двух равенств следует утверждение задачи.

3. Предположим, что все числа на сторонах различны. Пусть в некоторой клетке записано число k. Так как все числа на сторонах этой клетки различны и делятся на k, то их сумма не меньше $k + 2k + 3k + 4k = 10k$. Просуммировав такие неравенства по всем клеткам, мы каждую сторону учтем дважды, поэтому сумма всех чисел на сторонах хотя бы в 5 раз больше суммы всех чисел в клетках. По условию эти суммы отличаются ровно в 5 раз, поэтому все указанные неравенства обращаются в равенства, т.е. на сторонах клетки с числом k записаны числа k, $2k$, $3k$, $4k$. Пусть m – наименьшее из всех чисел на сторонах. Тогда на сторонах смежных с ней клеток записаны, например, равные числа $2m$.

4. Пусть прямоугольник имеет размеры $a \times b$, где a – число строк, b – число столбцов. Докажем, что хотя бы одно из чисел a или b делится на n. Предположим, что это не так: пусть $a = kn + a_1$, $b = ln + b_1$, причем без ограничения общности можно считать, что $0 < a_1 \leq b_1 < n$. Используем диагональную раскраску прямоугольника в n цветов (диагонали идут вправо-вниз). Так как каждая полоска содержит по одной клетке каждого цвета, то клеток всех цветов поровну. Отрежем от прямоугольника сначала прямоугольник $kn \times b$, а затем от оставшейся части – прямоугольник $a_1 \times ln$. Обе отрезанные части можно разбить на полоски $1 \times n$, поэтому в каждой из них клеток всех цветов поровну, а значит, это верно и для оставшегося прямоугольника $a_1 \times b_1$. Пусть в нем левая верхняя клетка покрашена, например, в первый цвет (рис. 5). Тогда всего есть a_1 клеток

	1	2	3	4		
	n	1	2	3	4	
a_1		n	1	2	3	4
			n	1	2	3
			b_1			

Рис. 5

первого цвета и столько же клеток каждого из остальных цветов, т.е. всего в прямоугольнике $a_1 n > a_1 b_1$ клеток. Противоречие.

Будем считать, что b делится на n. Применим теперь для прямоугольника горизонтальную раскраску в n цветов. Тогда количество клеток каждого цвета кратно n. В каждой горизонтальной полоске $1 \times n$ число клеток первого цвета равно 0 или n, т.е. делится на n. Следовательно, вертикальные полоски содержат кратное n число клеток первого цвета. Но каждая вертикальная полоска покрывает ровно одну клетку первого цвета, поэтому их количество делится на n.

5. Например, 8102790310.

Несложно доказать по индукции, что если в строку записаны числа $3^n, 3^{n-1}, \ldots, 3, 1$, то можно вычеркнуть некоторые из них, а между остальными расставить плюсы и минусы так, чтобы результат был равен любому наперед заданному натуральному числу от 1 до $\frac{3^{n+1} - 1}{2}$.

Пусть мудрец напишет число, указанное в ответе. Из утверждения выше следует, что любое число, которое назовет король, может быть представлено в виде суммы некоторых из чисел 81, 27, 9, 3, 1, взятых со знаком «плюс» или «минус». Лишние степени тройки можно убрать, поставив знак умножения между каждой из них и соседним нулем. Останутся нужные степени тройки и несколько равных нулю произведений. Мудрец может расставить между ними плюсы и минусы так, чтобы получить число, названное королем.

Замечание. Существуют и другие числа, удовлетворяющие условию.

6. Отметим на медиане BM такую точку N, что $MN = BK$ (рис. 6). Треугольник MCK равнобедренный, поэтому $\angle AMN = 180° - \angle KMC = 180° - \angle MKC = \angle CKB$. Кроме того, $AM = CM = CK$, следовательно, треугольники AMN и CKB равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $NA = BC$ и $\angle ANM = \angle CBK$. Так как угол ANM является внешним к треугольнику ANB, то $\angle BAN = \angle ANM - \angle ABN = \angle CBK - \angle ABN = \angle ABN$. Значит, треугольник ABN равнобедренный и $BC = NA = NB = BM - MN = BM - BK = MK$.

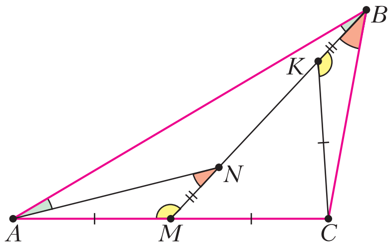


Рис. 6

7. Докажем, что удачное разбиение красиво. Проведем в каждой доминошке диагональ из левого нижнего угла в правый верхний. Предположим, что какие-то две диагонали имеют общую вершину A. Тогда квадрат 2×2 с центром A не содержит целиком ни одной доминошки, что противоречит удачности разбиения.

Теперь докажем, что красивое разбиение удачно. Предположим, что это не так и нашелся квадрат 2×2, не содержащий ни одной целой доминошки. Тогда в его центре A сходятся четыре доминошки. Максимум у одной из них диагональ может выходить из точки A, поэтому найдутся две доминошки, имеющие общий отрезок границы, у которых проведенные диагонали не содержат точку A. Тогда эти доминошки должны быть расположены перпендикулярно друг другу, т.е. как показано на рисунке 7. Закрашенную клетку должна покрывать какая-то доминошка, при этом она не может быть вертикальной, иначе ее диагональ имела бы общий конец с диагональю одной из рассматриваемых доминошек. Значит, эта клетка покрыта горизонтальной доминошкой, причем ее диагональ проводится однозначно. Далее рассмотрим новую закрашенную клетку. Аналогично ее может покрывать только горизонтальная доминошка, в которой мы также однозначно проводим диагональ. Продолжая такие рассуждения, придем к противоречию с тем, что число доминошек конечно.

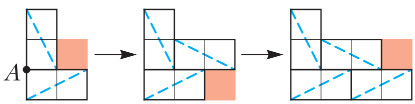


Рис. 7

8. 2, 3, 4.

Докажем, что каждое натуральное число $a > 2$ входит в одну из пифагоровых троек. Действительно, если $a = 2k+1$, то $(2k+1)^2 + \left(2k^2+2k\right)^2 = \left(2k^2+2k+1\right)^2$, а если $a = 2k$, где $k > 1$, то $(2k)^2 + \left(k^2-1\right)^2 = \left(k^2+1\right)^2$. Значит, из высказывания Пети можно сделать вывод, что его число равно 1 или 2 (пифагоровых троек с этими числами, очевидно, не существует).

Пусть Васе учитель сообщил число b. Тогда стороны треугольника могут быть равны $(1,b,b)$, $(2,b,b-1)$, $(2,b,b)$, $(2,b,b+1)$. Из высказывания Васи следует, что $b \le 3$, иначе могло бы быть два варианта неравнобедренного треугольника: $(2,b,b-1)$ и $(2,b,b+1)$. Значит, число у Толи не больше 4. Если бы оно было не больше 3, то треугольник был бы равнобедренным. Однако Толя заявил, что это не так, поэтому его число равно 4. Тогда возможен единственный вариант: Васе учитель сообщил число 3, а Пете – число 2.

9. Предположим, что у каждых двух гномов остался общий друг. Если какой-то гном A поссорился с гномом B в своей строке и с гномом C в своем столбце, то с гномом, который живет в одном столбце с B и в одной строке с C, у него больше нет общих друзей. Поэтому обе ссоры каждого гнома либо горизонтальные, либо вертикальные.

Будем считать, что в прямоугольнике 11 строк и 22 столбца. Рассмотрим произвольный столбец. Если бы все 11 гномов в нем имели горизонтальные ссоры, то они поссорились бы с 22 гномами в 21 оставшемся столбце. Значит, какие-то два гнома A и B из рассматриваемого столбца поссорились бы соответственно с гномами C и D из одного столбца, но тогда у гномов A и D не было бы больше общих друзей. Следовательно, в каждом столбце есть гном с вертикальными ссорами. Кроме него есть еще как минимум два гнома, с которыми он поссорился, поэтому в каждом столбце не менее трех поссорившихся по вертикали гномов, а всего их не меньше $3\cdot22 = 66$. Значит, в одной из строк хотя бы шесть гномов имеют вертикальные ссоры. Но тогда какие-то два из них поссорились с гномами из одной строки, и мы аналогично приходим к противоречию.

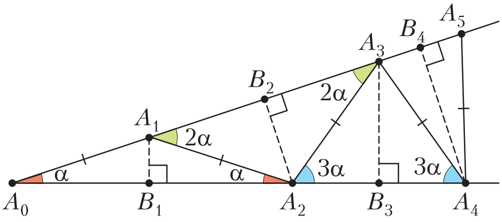


Рис. 8

10. При всех N.

Рассмотрим угол величиной α с вершиной A_0 (рис. 8). На одной из его сторон отложим отрезок $A_0A_1 = 1$ и опустим на другую сторону перпендикуляр A_1B_1. Теперь отразим точку A_0 симметрично относительно B_1, получим точку A_2. Из этой точки опустим перпендикуляр A_2B_2 на другую сторону угла и, отразив точку A_1 симметрично относительно B_2, получим точку A_3. Будем продолжать этот процесс, при этом все треугольники $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ будут равнобедренными с боковыми сторонами, равными 1, и углом при основании $k\alpha$ (поскольку при $k > 1$ угол $A_kA_{k-1}A_{k+1}$ является внешним к треугольнику $A_0A_{k-1}A_k$). Следовательно, каждый треугольник $A_0A_kB_k$ разрезан требуемым образом на $2k - 1$ прямоугольных треугольников, а каждый треугольник $A_0A_kA_{k+1}$ – на $2k$ треугольников. Для того чтобы была возможность построить такое количество треугольников, должно выполняться неравенство $k\alpha < 90°$, поэтому для каждого N можно подобрать нужное значение α.

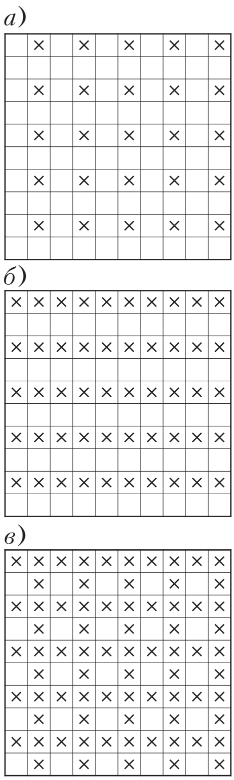


Рис. 9

11. За 3 вопроса.

Оценка. Есть 9^3 возможных расположений покрашенного куба, а на свой вопрос Дима может получить только девять различных ответов (от 0 до 8), поэтому за два вопроса он сможет различить не более 9^2 позиций.

Алгоритм. Диме необходимо узнать, в каких двух слоях по каждому из трех направлений расположены черные кубики. Покажем, как за один вопрос он может узнать эти два слоя по одному направлению. Например, рассмотрим слои, параллельные фронтальной грани куба. Во фронтальном слое и соседнем с ним Дима не называет ни одного кубика, в следующих двух называет кубики, отмеченные на рисунке 9,*а*, в следующих двух – отмеченные на рисунке 9,*б*, в следующих двух – отмеченные на рисунке 9,*в*, в двух последних слоях – все кубики. Легко проверить, что два соседних слоя, в которых находится покрашенный куб, однозначно восстанавливаются по ответу. Задав два аналогичных вопроса по двум другим направлениям, Дима поймет, где расположены черные кубики.

12. Для удобства будем считать, что в нашем 999-угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Так как на каждом шаге добавляется четное число точек пересечения, то общее число точек пересечения всегда четно. Допустим, мы сумели провести все диагонали. Каждой паре пересекающихся диагоналей можно поставить в соответствие четверку вершин 999-угольника, являющихся концами этих диагоналей, и наоборот, поэтому всего точек пересечения $C_{999}^4 = \dfrac{999 \cdot 998 \cdot 997 \cdot 996}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 333 \cdot 499 \cdot 997 \cdot 249$. Но это число нечетно, следовательно, провести все диагонали нельзя.

Предположим, мы сумели провести все диагонали, кроме какой-то одной AB. Если между точками A и B с одной стороны k вершин, то с другой $997 - k$ вершин. Тогда диагональ AB пересекает $k(997 - k)$ диагоналей – четное число, поэтому мы можем провести и AB тоже. Но, как уже было доказано, все диагонали провести нельзя, значит, в итоге хотя бы две диагонали проведены не будут.

13. Пусть I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC (рис. 10). Рассмотрим описанную окружность прямоугольного треугольника AA_0I. Докажем, что середина K дуги AA_0 этой окружности, не содержащей точку I, является центром описанной окружности треугольника AA_0A_1. Действительно, она равноудалена от точек A и A_0, а также лежит на биссектрисе угла AIA_0, которая является также и серединным перпендикуляром к отрезку A_1A_0. Аналогично, середина L дуги CC_0 описанной окружности треугольника CC_0I является центром описанной окружности треугольника CC_0C_1. Далее можно рассуждать по-разному.

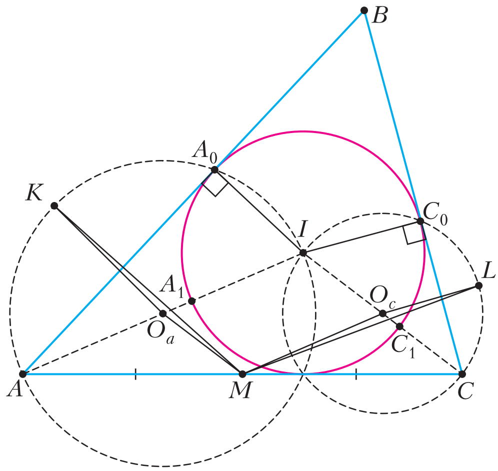


Рис. 10

Первый способ. Без ограничения общности будем считать, что $\angle BAC \le \angle BCA$. Пусть O_a и O_c – центры описанных окружностей треугольников AA_0I и CC_0I соответственно, а M – середина AC. Так как MO_a и MO_c – средние линии треугольника AIC, то $MO_a = O_cI = LO_c$ и $KO_a = O_aI = MO_c$. Из параллельности прямых MO_a и CI, а также O_aK и IA_0 (обе они перпендикулярны AA_0) получаем $\angle MO_aK = \angle CIA_0 = \angle CIC_0 + \angle C_0IA_0 = = \angle CIC_0 + 120°$. Аналогично, $\angle LO_cM = \angle C_0IA = = \angle CIC_0 + \angle CIA = \angle CIC_0 + 120°$. Следовательно, треугольники MO_aK и LO_cM равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $MK = ML$.

Второй способ. Так как $\angle A_0IC_0 = \angle A_1IC_1 = 120°$, то дуги A_0C_0 и A_1C_1 вписанной окружности треугольника ABC равны. Следовательно, хорды A_0A_1 и C_0C_1 параллельны, поэтому точки K, I, L лежат на одной прямой. При этом $\angle AKI = = \angle CLI = 90°$, т.е. $AKLC$ – прямоугольная трапеция. Ее средняя линия является серединным перпендикуляром к стороне KL, значит, середина стороны AC равноудалена от точек K и L.

14. За 5 вопросов.

Оценка. Каждый вопрос делит цифры на две группы: одни соответствуют ответу «да», остальные – ответу «нет». Пусть жюри на первый вопрос ответило «да». Если мы точно знаем, правдивый ли это ответ, то наш вопрос не разделял цифры на группы. В противном случае никаких выводов о числе мы сделать также не можем, так как не знаем, сказали нам правду или нет. Значит, у нас по-прежнему остается девять возможных вариантов. Даже если все последующие ответы будут правдивые, то для отгадывания одной цифры из девяти потребуется еще хотя бы четыре вопроса, поскольку $9 > 2^3$.

Алгоритм. Сначала научимся отгадывать одну цифру из пяти за четыре вопроса. Будем считать, что это цифры 1, 2, 3, 4, 5. Спросим: «Это 1 или 2?»

1) Если ответ «да», то спросим еще раз: «Это 1 или 2?»

1.1) Если ответ снова «да», то загаданная цифра действительно 1 или 2 и нам еще не врали. Спросим два раза: «Это 1?» Если оба раза нам ответят «да», то загадана цифра 1, а если будет хотя бы один ответ «нет», то цифра 2.

1.2) Если ответ «нет», то на первый вопрос нам соврали и загадана одна из цифр 3, 4, 5. За два вопроса, на которые нам ответят правдиво, мы отгадаем эту цифру.

2) Если на первый вопрос нам ответили «нет», то спросим: «Это 3?»

2.1) Если ответ «да», то спросим еще раз: «Это 3?» Если нам снова ответят «да», то загадана действительно цифра 3, а если «нет», то нам уже соврали и загадана цифра 4 или 5. За один вопрос мы ее отгадаем.

2.2) Если ответ «нет», то загадана цифра 4 или 5 и нам еще не врали. Аналогично случаю 1.1, определим загаданную цифру за два вопроса.

Теперь перейдем к решению исходной задачи. Спросим: «Это 1, 2, 3 или 4?» Если ответ «нет», то загадана одна из пяти цифр 5, 6, 7, 8, 9 и нужно угадать ее за четыре вопроса, а это мы уже умеем. Если же ответ «да», то спросим: «Это 2, 3, 4 или 5?»

1) Если ответ «нет», то спросим: «Это 1?» Если нам ответят «да», то загадана действительно цифра 1, а если «нет», то на первый вопрос нам соврали и загадана одна из цифр 6, 7, 8, 9. За два вопроса, на которые нам ответят правдиво, мы отгадаем эту цифру.

2) Если ответ «да», то спросим: «Это 2 или 3?»

2.1) Если ответ «нет», то возможны следующие варианты: либо загадана цифра 1 или 5 и нам уже соврали, либо загадана цифра 4 и нам еще не врали. Сначала спросим: «Это 1?», потом: «Это 5?» Если на один из вопросов нам ответят «да», то соответствующая цифра и загадана, а если оба ответа будут «нет», то загадана цифра 4.

2.2) Если ответ «да», то возможны следующие варианты: либо загадана цифра 2 или 3 и нам еще не врали, либо загадана цифра 4 и на последний вопрос нам соврали. Спросим: «Это 2?»

2.2.1) Если ответ «нет», то спросим: «Это 3?» Если нам ответят «да», то загадана действительно цифра 3, а если «нет», то цифра 4.
2.2.2) Если ответ «да», то спросим еще раз: «Это 2?» Если нам снова ответят «да», то загадана действительно цифра 2, а если «нет», то цифра 3.

15. Есть.

Докажем по индукции следующее утверждение. Пусть $K_n = \frac{3^n - 1}{2}$, тогда натуральные числа от 1 до K_n можно покрасить в n цветов так, чтобы сумма любых двух чисел одного цвета (в том числе и одинаковых) не была числом того же цвета.

База $(n = 1)$ очевидна.

Шаг индукции. Пусть числа от 1 до K_n покрашены в n цветов в соответствии с условием. Покажем, как покрасить в $n+1$ цвет числа от 1 до $K_{n+1} = 3K_n + 1$. Разделим их на три группы: от 1 до K_n, от $K_n + 1$ до $2K_n + 1$ и от $2K_n + 2$ до $3K_n + 1$. Для чисел первой группы раскраску менять не будем. Все числа второй группы покрасим в $(n+1)$-й цвет. А числа третьей группы покрасим в n первых цветов так же, как и числа первой группы, если увеличить каждое из них на $2K_n + 1$. Докажем, что полученная раскраска удовлетворяет условию. Для чисел первой группы это следует из предположения индукции, а также из того, что сумма двух чисел этой группы не превышает $2K_n$, т.е. не может попасть в третью группу. Сумма двух чисел второй группы не меньше $2K_n + 2$, поэтому не может быть равна числу из этой же группы. Сумма двух чисел третьей группы не меньше $4K_n + 4$, что больше K_{n+1}. Осталось разобраться с одноцветными числами из первой и третьей групп. Предположим, что сумма каких-то двух таких чисел является числом того же цвета. Если они равны m_1 и m_2 соответственно, то $m_1 + m_2 = m_3$ – число третьей группы, покрашенное в тот же цвет. Тогда разность двух чисел первой группы, соответствующих числам m_3 и m_2, равна m_1, однако все эти три числа одного цвета, что противоречит предположению индукции.

Таким образом, утверждение доказано. Осталось заметить, что $K_7 = \frac{3^7 - 1}{2} = 1093 > 1000$, поэтому натуральные числа от 1 до 1000 можно покрасить в семь цветов так, чтобы выполнялось указанное выше условие, после чего раздать каждому гному самородки, массы которых равны числам одного цвета.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8

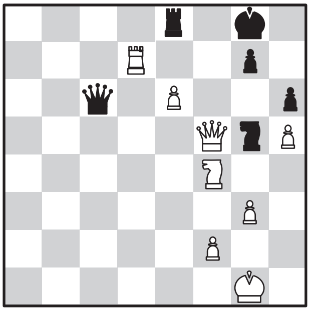
Тел.: (831) 218-40-40

ПешКа превращаетсЯ В… СЛОНА

В прошлый раз мы рассматривали позиции, в которых шахматисты смогли уйти от поражения с помощью патовой ловушки. В сегодняшнем выпуске рассмотрим позиции, в которых избежать пата можно при помощи редкого приема – превращения пешки не в ферзя, а в слона.

Поводом для обращения к этой теме стала партия, сыгранная летом 2022 года на турнире в Рейкьявике.

Й.Хьяртассон – Э.Андерсен
Рейкьявик, 2022

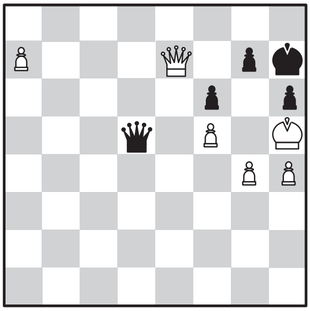


Игравший белыми исландский гроссмейстер упустил блестящую комбинацию: 54. ♕f7+!! ♞f7 55. ef+ ♚h7! С ловушкой: 56. fe+?? ведет к пату после 56…♛g2+!, а выигрывает 56. fe♗!, поскольку нестандартное материальное соотношение – ладья, слон, конь и пешка против ферзя – явно в пользу белых.

В партии же было сыграно **54. e7?**, и она завершилась вничью через 35 ходов.

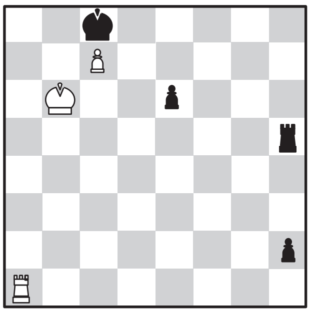
А.Решко – О.Каминский
Ленинград, 1972

Эта позиция, сыгранная в чемпионате Ленинграда, вошла во многие учебники по эндшпилю и тактике. После точного хода белых **60. ♕e8!** (после 60. ♕f8?? белые внезапно получали мат – 60…g6×!) черные поставили еще одну ловушку – **60…♛b7!** в



расчете на 61. a8♕ ♛f7+! 62. ♕f7 пат. Единственный выигрывающий ход – **61. a8♗!** привел белых к успеху через 10 ходов. Превращение в ладью также вело к пату, а после 61. a8♘ ♛a7 возникала этюдная позиция, при которой конь не может уйти с края доски, так как белый ферзь не может прийти к нему на помощь из-за необходимости контролировать поле g6 ввиду угрозы мата, рассмотренной выше.

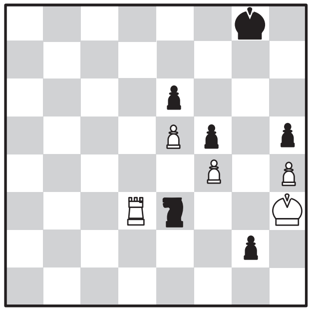
Р.Холмов – Я.Эльвест, 1985



Еще один классический пример из практики советских гроссмейстеров. Белые поставили ловушку, сыграв на предыдущем ходу ♖h1-a1, однако черные смогли ее избежать, превратив пешку в слона (в случае 1…h1♛ 2. ♖a8+! вело либо к пату, либо к появлению белого ферзя). После **1…h1♝!** партия быстро закончилась: **2. ♖f1 ♜h8 3. ♖f7 ♜e8 4. ♔c5 e5 5. ♔d6 ♝b7**, и **белые сдались.**

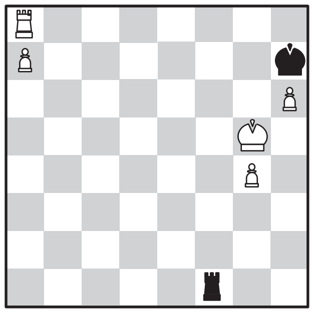
Чан – Депаскуаль, 1985

Из четырех возможных превращений в данном случае выигрывает только одно! Вот они.



1) 1…g1♛ позволяет белым продемонстрировать «бешеную» ладью: 2. ♖d8+ ♚h7 3. ♖h8+! – и пата не избежать. 2) 1… g1♜ 2. ♖e3 с материальным равенством. 3) 1… g1♞ 2. ♔h2, и теряется один из коней. 4) Точное **1… g1♝!** позволило черным выиграть ввиду превосходства двух легких фигур над ладьей после **2. ♖d8+ ♚f7 3. ♖h8 ♞d5 4. ♔g3 ♝e3 5. ♖h5 ♝f4+ 6. ♔f3 ♚g7 7. ♔f2 ♝h6,** и **белые сдались.**

А.Грищук –Лефонг Хуа, 1994



На чемпионате мира среди детей до 12 лет юный Александр Грищук сначала не попался в патовую ловушку после **66…♜f8!**, сыграв **67. ♖b8!**, а затем и после **67…♜b8**, забрав пешку с превращением в слона. Справедливости ради, отметим, что превращение в коня также вело белых к победе.

А.Русанов

Индекс 90964

Что общего у башни
Толи Втулкина и у
Останкинской телебашни?
А что объединяет
Останкинскую башню
и цветок лилии?

ПОХОЖИЕ КОНСТРУКЦИИ

Прогулки с физикой

ISSN 0130-2221 22009

(Подробнее – на с. 26 внутри журнала)