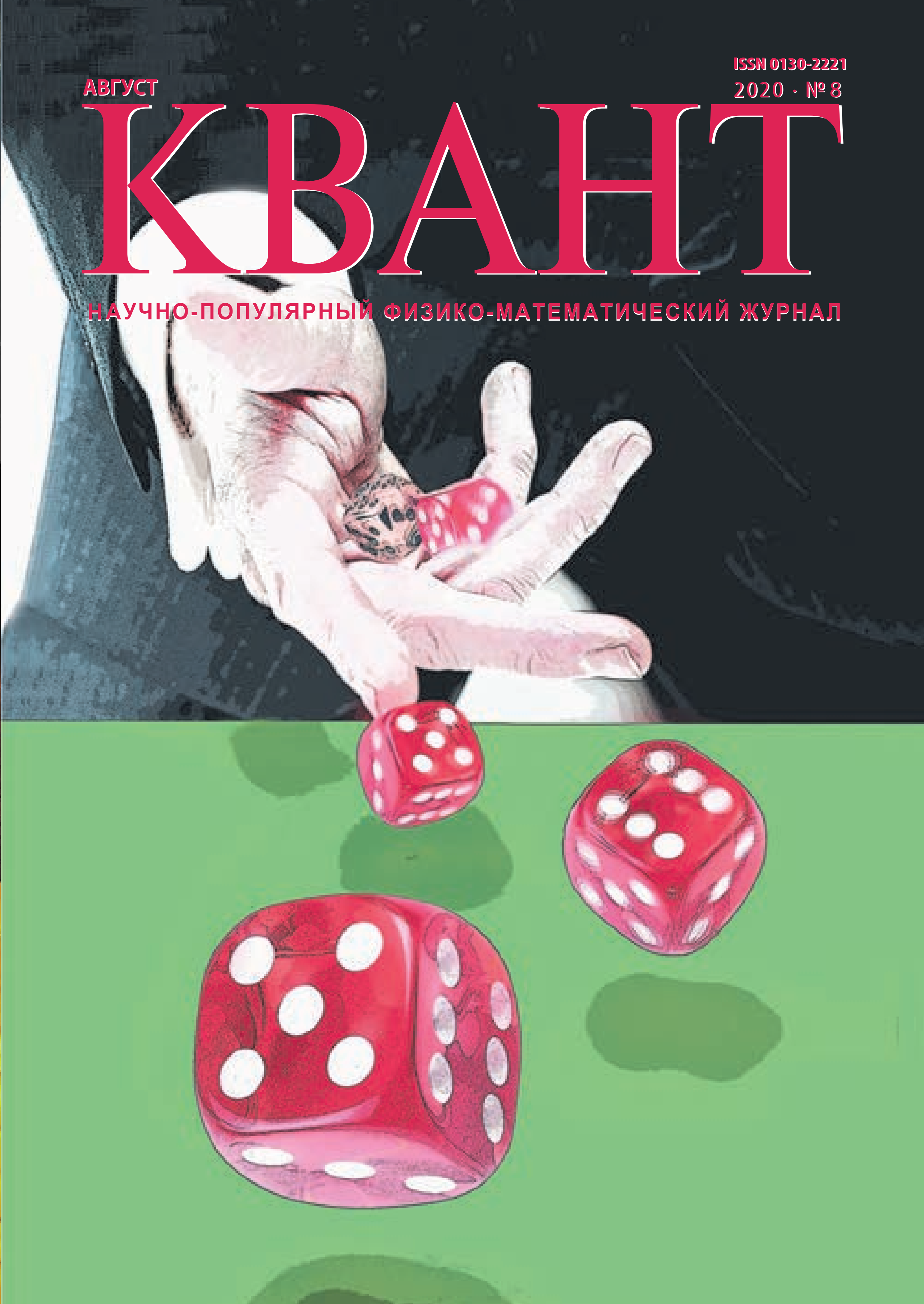
ISSN 0130-2221
АВГУСТ
2020 · № 8

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



Стабильность

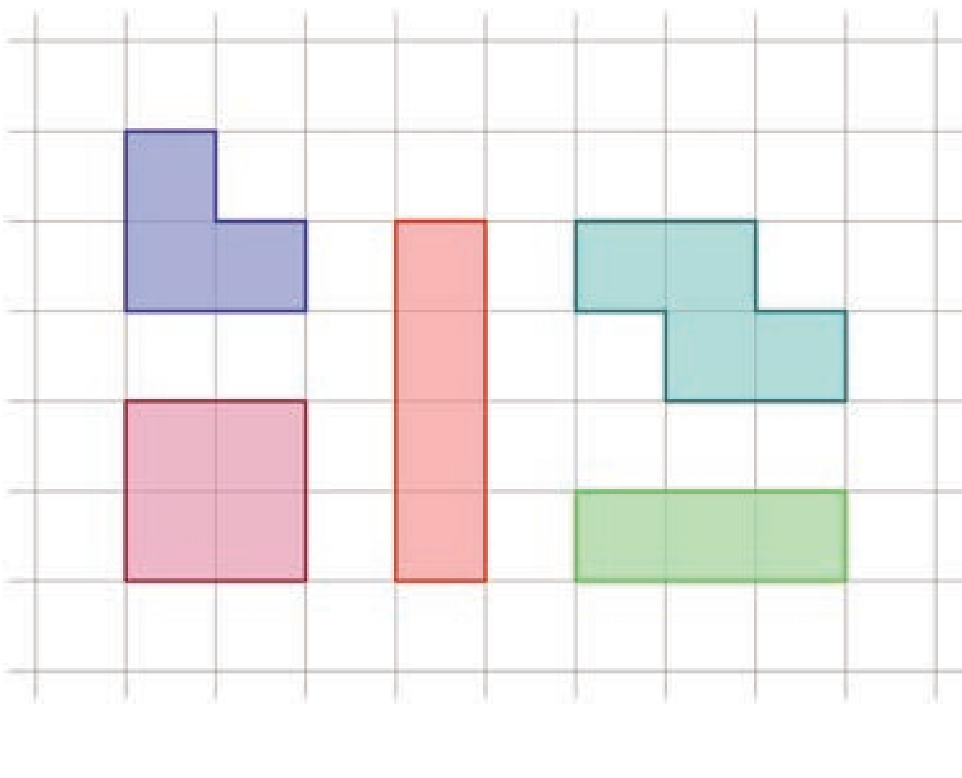
Обычно в головоломках с брусочками требуется, передвигая детали по определенным правилам (внутри коробки, не отрывая от дна и не переворачивая), добиться их определенного расположения в коробке.

Но в этой головоломке, придуманной Джорджем Зихерманом (George Sicherman), все наоборот: нужно так поместить пять деталей в коробку 4×7, чтобы они заклинили друг друга.

Проверить, что вы правильно справились с заданием, очень просто: достаточно понаклонять коробку в разные стороны и убедиться, что ни одна из деталей не может сдвинуться с места.

Желаем успеха!

Е.Епифанов



КВАНТ

АВГУСТ 2020 № 8

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Геометрические вероятности

Н.Б.ВАСИЛЬЕВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ НЕ БУДЕМ заниматься строгим определением основных понятий теории вероятностей, а познакомимся с некоторыми задачами, где посчитать вероятности событий помогают соображения симметрии, а также наглядное изображение событий с помощью координат на плоскости.

При этом мы будем иметь дело не только с задачами, где имеется конечное число равновозможных вариантов, но и с такими, где вариантов бесконечно много. Вот две из них.

Задача о встрече. *Двое приятелей договорились встретиться на площади Маяковского от 12 до 13 часов. Каждый приходит в некоторый случайный момент времени, ждет 15 минут другого и уходит. Какова вероятность, что они встретятся?*

Задача об остроугольном треугольнике. *На окружности случайно выбираются три точки. Какова вероятность, что треугольник с вершинами в этих точках – остроугольный?*

Но начнем мы все же с более простых, конечных примеров.

Бросаем кубик

Самый удобный инструмент для первого знакомства с вероятностями – игральная кость: кубик, грани которого занумерованы числами 1, 2, …, 6.

Поскольку кубик совершенно симметричен, мы считаем, что все шесть возможных вариантов имеют одинаковую вероятность. Скажем, вероятность выпадения шестерки равна $1/6$, вероятность, что выпадет число

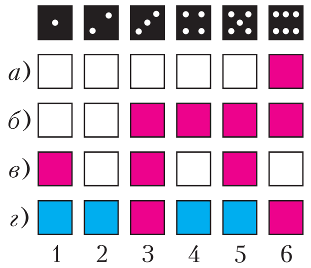


Рис. 1

не меньшее 3, равна $4/6 = 2/3$, вероятность, что выпадет нечетное число очков, равна $1/2$. (Соответствующие *события* – множества «благоприятных исходов» – показаны красным цветом на рисунках 1,*а–в*.)

Если под рукой нет игрального кубика, с таким же успехом можно катить по столу шестигранный карандаш, на гранях которого написаны номера 1, 2, …, 6. Легко представить себе карандаш не с 6, а с любым числом n боковых граней.

Итак, пусть у нас есть инструмент, обеспечивающий получение n равновозможных вариантов. Мы по определению считаем, что вероятность осуществления каждого из этих вариантов равна $1/n$, а вероятность каждого события A, состоящего из k вариантов, равна k/n.

При $n = 6$, конечно, легко просто пересчитать все варианты, изобразив их на рисунке. Но когда число вариантов n велико, на помощь приходят некоторые правила вычисления вероятностей.

Будем обозначать вероятность события A через $p(A)$. События у нас – это просто некоторое подмножество множества E всех возможных вариантов, причем $p(E) = 1$. Для бросаний кубика множество E состоит из шести элементов 1, 2, …, 6. Самые простые соотношения между вероятностями возникают из соотношений между мно-

Опубликовано в «Кванте» №1 за 1991 год.

жествами, точнее, количествами элементов в них.

Вероятность события $\bar{A}$, *дополнительного* к A (в него входят все элементы E, не входящие в A), равна

$$p\left(\bar{A}\right) = 1 - p(A). \qquad (1)$$

Например, если A состоит из чисел от 1 до 6, делящихся на 3, то $\bar{A}$ – числа, не делящиеся на 3; $p(A) = 1/3$, $p\left(\bar{A}\right) = 1 - 1/3 = 2/3$ (рис.1,*г*).

Объединение $A \cup B$ – событие, состоящее в том, что произошло *хотя бы одно* из двух событий: A *или* B. Если события A и B *несовместны*, т.е. два множества A и B не пересекаются, то

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B). \qquad (2)$$

Если же события A и B *совместны*, т.е. имеется непустое пересечение AB, то

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(AB). \qquad (3)$$

(Пересечение двух множеств A и B – событие, состоящее в том, что выполняются одновременно A и B, – мы обозначаем, как принято в теории вероятностей, просто AB.)

Повторные испытания

Представим себе, что кубик бросили два раза (или – что сразу бросили два кубика); это – два независимых испытания.

Задача 1. *Какова вероятность, что при первом бросании выпадет не меньше 5 очков, а при втором – не меньше 4?*

Теперь множество E – это множество всех пар (x, y), где x и y – числа от 1 до 6 (x означает число очков, выпавшее на первом кубике, y – на втором). Все пары (x, y) равновероятны, их число равно $6 \cdot 6 = 36$. Удобно изобразить их в виде квадрата 6×6 клеток: клеточка с координатами x и y изображает пару (x, y) (рис.2). Из них надо выбрать те клетки, которые удовлетворяют условию задачи: $x \le 5$, $y \le 4$. Они заполняют прямоугольник 2×3 клетки. Итак, среди $6 \cdot 6$ пар выбрано $2 \cdot 3$, так что искомая вероятность равна

$$\frac{2 \cdot 3}{6 \cdot 6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

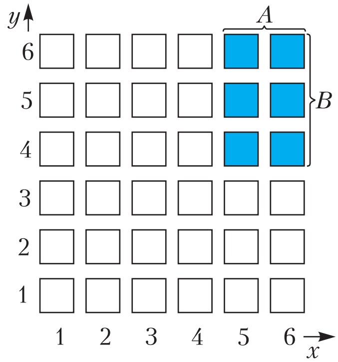


Рис. 2

Вообще, если событие A определяется по результату первого испытания, а B – по второму испытанию (т.е. A – это некоторый набор столбцов, а B – некоторый набор строк), то вероятность одновременного выполнения A и B равна

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B). \qquad (4)$$

В этом случае события A к B называют *независимыми*. Правило произведения (4) можно использовать и для большего числа независимых испытаний. Например, вероятность, что при каждом из трех бросаний кубика выпадет пятерка или шестерка, равна $(1/3)^3 = 1/27$.

Рассмотрим теперь два примера, где речь тоже идет о двух испытаниях, т.е. E – множество пар (x, y), но интересующее нас событие зависит от x и y более сложным образом, так что условие «независимости» уже не выполнено.

Задача 2. *Какова вероятность, что хотя бы при одном из двух бросаний кубика выпадет не менее 5 очков?*

Соответствующие пары отмечены на рисунке 3, так что искомая вероятность равна $20/36 = 5/9$.

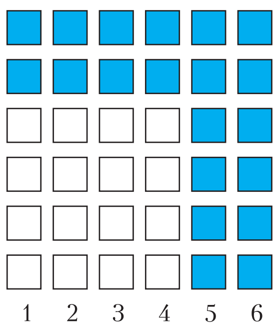


Рис. 3

Заметим, что можно рассуждать иначе: найти дополнительную вероятность того, что и при первом, и при втором бросании выпадет не более 4 очков. Это уже можно сделать по правилу произведения: $(2/3)\times(2/3) = 4/9$, поэтому искомая вероятность равна $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$.

Задача 3. *Какова вероятность, что количества очков, выпавших при двух бросаниях, отличаются не более чем на 1?*

Нужные пары отмечены на рисунке 4, это 6 клеточек по диагонали $x = y$ и по 5 на двух соседних с ней параллельных прямых. Искомая вероятность равна $16/36 = 4/9$.

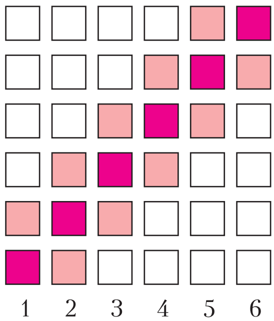


Рис. 4

Случайные числа и точки: равномерное распределение

Теперь речь пойдет о случайных точках на отрезке, на окружности, в квадрате... Как определяются вероятности в этом случае? Какие «события» можно рассматривать?

Покатим по столу круглый карандаш – цилиндр. Пусть его поверхность желтая, но некоторая полоска или несколько полосок ширины α покрашены в красный цвет (рис.5); какова вероятность, что карандаш остановится на красной, а не на желтой линии? (Здесь α – угол, измеряемый, скажем, в градусах.)

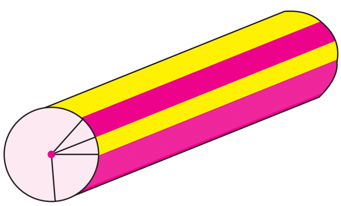


Рис. 5

Представим себе аналогичную задачу про карандаш с большим числом граней n, из которых k закрашены в красный цвет. Тогда искомая вероятность будет равна отношению k/n. Для круглого карандаша множество «элементарных событий» E – окружность, и вероятность каждого отдельного элемента – вероятность остановки на одной определенной линии – равна 0; но вероятность события «остановка на одной из красных линий» естественно считать равной отношению $\alpha/360°$.

Точно так же, говоря о случайной точке на отрезке (или на окружности) длины L, будем считать, что вероятность ее попадания в любой отрезок (или на дугу) длины d равна d/L. В соответствии с правилом (1), мы считаем также, что вероятность попадания в один из данных (непересекающихся) отрезков суммарной длины d равна d/L. Например, вероятность, что первая после запятой цифра случайного числа на отрезке $[0;1]$ – простое число, т. е. одна из цифр 2, 3, 5 и 7 (рис.6), равна $4/10 = 2/5$.

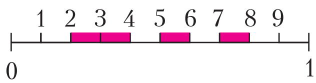


Рис. 6

Точно так же, говоря о случайной точке в квадрате или другой фигуре площади S, мы будем считать, что вероятность ее попадания в каждую область площади s равна s/S. Заметим, что и для длины на отрезке и для площади фигуры выполнены правила (1), (2) и (3).

Замечательно, что, выбирая независимо друг от друга два числа x и y на отрезке $[0; 1]$, можно считать, что (x, y) – это координаты случайной точки в единичном квадрате: по аналогии с формулой произведения (4), вероятность попадания точки (x, y) в прямоугольник со сторонами a и b, параллельными осями Ox и Oy, равна произведению ab, т. е. площади этого прямоугольника.

Например, вероятность того, что случайное число, выбранное на отрезке $[0; 1]$, находится на расстоянии не более 0,1 от

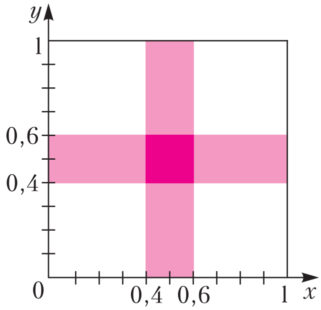


Рис. 7

середины отрезка, равна 0,2 (такие точки покрывают отрезок от 0,4 до 0,6). Если x и y – два случайных числа на отрезке $[0;\,1]$, вероятность того, что *оба* они удалены от середины не более чем на 0,1, равна $0,2^2 = 0,04$, а вероятность того, что *хотя бы одно* из них удалено от середины не более чем на 0,1, равна 0,36 (рис.7); эту вероятность можно найти, сложив площади прямоугольников, составляющих «крест», а можно – перейдя к «дополнительным событиям» – по формуле $\left(1-0,8^2\right)$.

Теперь мы можем решить и задачу о встрече, сформулированную в начале статьи. Уточним ее следующим образом. Будем считать, что каждый из приятелей приходит в некоторый случайный момент, выбранный на отрезке $[0;\,45]$ (в течение первых 45 минут условленного часа), и ждет другого 15 минут; тем самым они встретятся, если разность между моментами x и y их прихода (по модулю) не превосходит 15.

Изобразим на квадрате $0 \le x \le 45$, $0 \le y \le 45$ множество точек $(x,\,y)$, в которых $|x-y| \le 15$ – оно ограничено прямыми $y-x=15$ и $y-x=-15$, параллельными диагонали $x=y$ (рис.8). Площадь этого

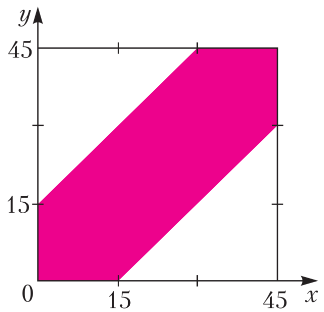


Рис. 8

множества равна 45^2-30^2 (два белых треугольника вместе составляют квадрат со стороной 30), а искомая вероятность равна ее отношению к площади всего квадрата 45×45:

$$1-\frac{30^2}{45^2}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}.$$

Решим еще одну задачу про случайную точку $(x,\,y)$.

Задача 4. *Найдите вероятность $p=p(a)$ того, что сумма $x+y$, где x, y – случайные числа на отрезке* $[0;\,1]$, *больше данного числа a.*

Уравнение $x+y=a$ задает прямую, параллельную диагонали $x+y=1$ квадрата. Искомая вероятность – площадь части квадрата, лежащей выше этой прямой. (При $a>1$ это треугольник, при $a<1$ – пятиугольник, и легче считать площадь дополнения.) Ответ записывается так:

$$p=\begin{cases}(2-a)^2/2 \ \text{при}\ a\ge 1,\\ 1-a^2/2 \ \text{при}\ a\le 1.\end{cases}$$

Соображения симметрии. Точки на окружности

Заметим, что при $a=1$ в предыдущей задаче получается ответ $p=1/2$. (Соответствующие точки $(x,\,y)$ лежат над диагональю.) Его можно угадать сразу, не рисуя картинку на квадрате: если x, y – числа, случайно выбираемые на отрезке $[0;\,1]$, то условие $x+y\le1$ можно записать в виде $x\le 1-y$ и прочесть так: «x ближе к 0, чем y к 1». Ясно, что дополнительное условие получается просто заменой x на y и имеет ту же вероятность: ведь роли x и y, а также концов отрезка совершенно равноправны.

Вот еще один пример.

Задача 5. *На отрезке* $[0;\,1]$ *случайно выбираются три числа. Какова вероятность того, что а) выбранное последним число наибольшее; б) числа идут в порядке возрастания?*

Здесь речь идет уже не о двух, а о трех числах x, y, z. Тройки $(x,\,y,\,z)$ можно было бы рассматривать как координаты точки в кубе и подсчитывать объемы нужных множеств. Но в этом нет нужды. Ведь ясно, что все 6 вариантов расположения трех чисел: $x<y<z$, $y<x<z$, $x<z<y$, $y<z<x$, $z<x<y$, $z<y<x$ совершенно равноправны и имеют одинаковую вероятность по 1/6. (При этом совпадение хотя бы двух из трех чисел имеет нулевую вероятность. – *Прим. ред.*) Таким образом, ответ на вопрос б) 1/6, а на вопрос а) 1/3 (ему отвечают два первых варианта).

Решим теперь задачу об остроугольном треугольнике, сформулированную в начале статьи. Ясно, что при любом повороте окружности вероятности событий и условие «остроугольности» сохраняются; так что мы можем считать, что одна из трех выбираемых вершин A, B, C – скажем C – фиксирована, а две другие уже выбираются случайно. Будем задавать их положения величинами дуг $CA=\alpha$, $CB=\beta$, отсчитываемых против часовой стрелки. Будем измерять дуги в радианах, тогда пара (α,β) – это точка в квадрате $0<\alpha<2\pi$, $0<\beta<2\pi$. По теореме о том, что величина вписанного угла измеряется половиной дуги между его сторонами, углы треугольника ABC равны $\pi-\beta/2$, $\alpha/2$ и $(\beta-\alpha)/2$ (мы считаем, что $\beta>\alpha$, как на рисунке 9; случай $\alpha>\beta$ совершенно аналогичен – α и β меняются ролями). Точки (α,β) в треугольнике $\alpha<\beta<2\pi$, для которых все три угла A, B, C меньше $\pi/2$, т.е. $\beta>\pi$, $\alpha<\pi$ и $\beta-\alpha<\pi$, заполняют внутренность меньшего треугольника, образуемого средними линиями большего (рис.10). Ситуация в нижнем треугольнике $\beta<\alpha<2\pi$ симметрична относительно диагонали $\alpha=\beta$ квадрата. Поэтому искомая вероятность равна 1/4.

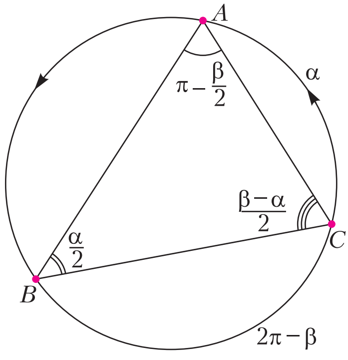


Рис. 9

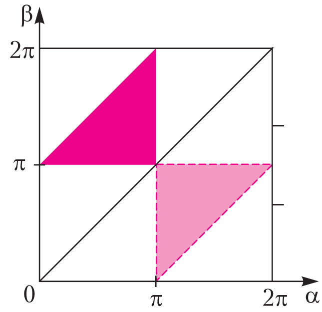


Рис. 10

У этой задачи есть и другое удивительно красивое решение, которое позволяет решить аналогичную задачу для n точек (см. упражнение 9 в конце статьи); мы узнали его от физика В.В.Фока и математика Ю.В.Чеканова.

Будем искать дополнительную вероятность того, что три точки A, B, C являются вершинами *тупоугольного* треугольника.

Рассмотрим для каждой точки M окружности диаметрально противоположную ей точку M' и полукруг, для которого M' служит серединой дуги. Тройка A, B, C «тупоугольная», если и только если полукруги, соответствующие точкам A, B и C, пересекаются по некоторому сектору (рис.11). (Для каждого радиуса OD в выделенном секторе все углы DOA, DOB, DOC – тупые; такой радиус OD существует, если A, B, C лежат на одной полуокружности или, что эквивалентно, образуют «тупоугольную» тройку.)

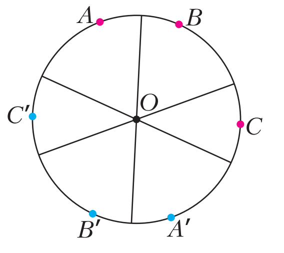


Рис. 11

Выбор случайных точек проведем в два этапа. Сначала отметим произвольно три пары диаметрально противоположных точек и проведем для каждой пары диаметр, относительно которого она симметрична.

А затем в каждой паре независимо выберем (с вероятностью 1/2) одну из точек. Докажем, что из 8 вариантов выбора точек ровно в 6 получится «тупоугольная» тройка A, B, C. В самом деле, три диаметра делят круг на 6 секторов, причем каждый сектор можно получить как пересечение трех определенных полукругов, соответствующих некоторому выбору точек A, B, C. Итак, вероятность получить «тупоугольную» тройку равна $6/8 = 3/4$, а значит, дополнительная вероятность равна $1/4$.

Задача Бюффона

Мы привыкли, что вероятность – это всегда дробь с небольшими целыми числителем и знаменателем. Но в заключение приведем две задачи, где в ответе встречается число π. Первая почти очевидна.

Задача 6. *На большой лист клетчатой бумаги со стороной клетки* 1 *случайно бросают точку. Какова вероятность, что она будет находиться на расстоянии меньше* $1/2$ *от центра некоторой клетки?*

Достаточно рассмотреть одну клетку. Точки, находящиеся на расстоянии не более $1/2$ от ее центра, заполняют круг площади $\pi/4$. Это и есть ответ: искомая вероятность (отношение площади круга к площади клетки) равна $\pi/4$.

Задача 7 (задача Бюффона об игле). *Плоскость разлинована на полосы шириной* 1. *На нее бросают иглу (отрезок) длиной* 1. *Какова вероятность, что игла пересечет одну из линий?*

У этой задачи удивительный ответ: $2/\pi$. Откуда же берется π, если в условии нет речи ни об окружностях, ни о расстояниях?

Наметим коротко одно из решений. Положение иглы (если не говорить о смещении ее вдоль линий, очевидно, не играющем роли) определяется двумя параметрами: расстоянием y конца иглы от верхнего края полосы, в которую он попал, $0 < y < 1$, и углом α иглы с прямой, перпендикулярной линиям (рис.12,*а*). Можно считать, по соображениям симметрии, что $\alpha < \pi/2$. Условие, при котором игла пересекает

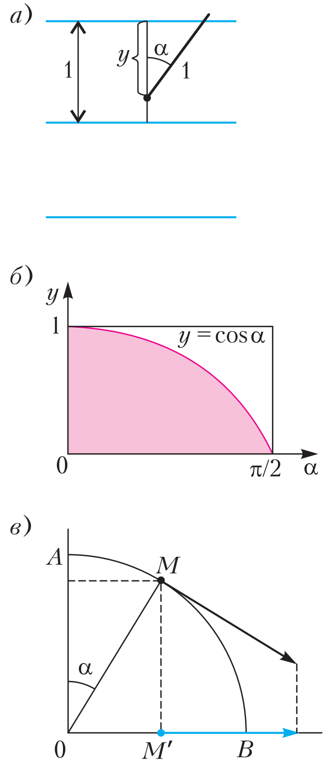


Рис. 12

край полосы: $y < \cos\alpha$. Итак, среди точек (α, y) в прямоугольнике $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < y < 1$ мы должны выбрать лежащие ниже линии $y = \cos\alpha$ (рис.12,*б*) и найти отношение площади S полученной фигуры к площади прямоугольника (равной $\pi/2$). Для тех, кто знаком с понятием интеграла, эта задача нетрудная: $\int_0^{\pi/2} \cos\alpha\, d\alpha = 1$. Но можно получить ответ, опираясь на аналогию из механики. Представим себе точку, равномерно с единичной скоростью проходящую дугу AB в 1/4 круга радиуса 1 (рис.12,*в*). Когда точка M находится в положении α на дуге $(0 < \alpha < \pi/2)$, скорость ее проекции M' на радиус OB равна как раз $\cos\alpha$. Так что рисунок 12,*б* – это график скорости точки M', а площадь S под графиком равна пройденному этой проекцией пути, т.е. $S = OB = 1$.

В заключение предлагаем несколько задач, похожих на те, с которыми мы познакомились.

Упражнения

1. Какова вероятность того, что при двух бросаниях кубика выпадут

а) два числа с суммой не меньше 10;

б) два числа, из которых первое делится на второе?

2. Пассажир приходит на остановку в случайный момент времени и дожидается автобуса одного из двух маршрутов, идущих с интервалами 10 и 15 минут. Найдите вероятность $p = p(t)$ того, что ему придется ждать не менее t минут.

3. Отрезок разделен на три равные части. Какова вероятность, что три точки, случайно брошенные на отрезок, попадут в три разных кусочка?

4. На окружности случайно выбраны четыре точки A, B, C, D. Какова вероятность того, что отрезки AC и BD пересекаются?

5. а) В окружности проведен диаметр. На нем случайно выбирается точка и через нее проводится хорда, перпендикулярная диаметру. Какова вероятность, что длина хорды больше радиуса окружности?

б) На окружности случайно выбираются две точки. Какова вероятность, что длина соединяющей их хорды больше радиуса?

в) В круге случайно выбрана точка. Какова вероятность, что хорды с серединой в этой точке больше радиуса?

г) Решите аналогичные задачи про хорду длины $r\sqrt{3}$, где r – радиус.

Замечание. Задачи а), б), в) как бы три варианта одной и той же: проведем случайную прямую, пересекающую данную окружность; какова вероятность, что длина высекаемой хорды больше радиуса? Но ответ в них разный (парадокс Бертрана)!

6. На окружности случайно выбраны три точки. Какова вероятность, что у треугольника с вершинами в этих точках а) есть угол больше 30°; б) все углы больше 30°; в) все углы меньше 120°?

7. На отрезке случайно выбраны две точки. Какова вероятность, что из отрезков, на которые он разбит, можно составить треугольник?

8. Плоскость разбита сеткой прямых на а) квадраты; б) правильные треугольники со стороной 1. Какова вероятность, что монета диаметра 1, случайно брошенная на плоскость, закроет одну из вершин сетки?

9. а) Найдите вероятность того, что выпуклый n-угольник с вершинами в случайных точках окружности содержит ее центр?

б) Докажите, что вероятность того, что n случайно выбранных точек на сфере лежат на одной полусфере (по одну сторону от некоторого большого круга), равна $\left(n^2 - n + 2\right)\big/2^n$.

Насос для наливания воды и элементарная физика

С.ПАРНОВСКИЙ

Помпа на кухне? Это редкость, если только это не что-то сантехническое или часть фильтра для очистки воды. Но все-таки можно вспомнить кухонные приборы, использующие помпу. В простейшем виде она предназначена для наливания обычной питьевой воды, доставляемой в больших бутылях (рис.1). Пара нажатий на крышку, которая служит ручкой ручного насоса, и вода уже льется в подставленную емкость. За этим стоит очень простая физика: насос гонит воздух в пластиковую бутыль, создавая в ней избыточное давление воздуха в верхней части, над водой. Это давление передается воде, и после того как оно превысит определенное значение, вода начнет течь из трубки. На том же принципе работает и ручная помпа в термопоте – устройстве для нагрева воды и поддержания ее в горячем состоянии (некий гибрид термоса и чайника; рис.2).

Рис. 1. Бутыль с водой и насос для ее наливания

Температура воды никак не влияет на работу помпы, поэтому смело можно ограничиться простейшим случаем наливания воды комнатной температуры. Чему равно минимальное необходимое избыточное давление воздуха? Если вы знакомы с формулой Паскаля для давления внутри жидкости, то ответ $p = \rho g h$ приходит мгновенно.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200801

С первыми двумя сомножителями вопросов нет: ρ – это плотность жидкости, в случае воды $\rho = 1000$ кг/м^3; $g = 9{,}8$ м/с^2 – это ускорение свободного падения. А что же считать высотой подъема воды h? Может показаться, что это разность высот между горизонтальным участком трубки для воды, т.е. максимальной высотой, на которую поднимается вода в помпе, и уровнем воды в помпе, но здесь есть определенный нюанс. Чтобы понять это, вспомним, что такое сифон. Воспользуемся для этого цитатой из книги Вильяма Сибрука «Роберт Вуд. Современный чародей физической лаборатории» (М.: Наука, 1980):

«*Другим открытием, возвысившим его в глазах мальчишек, было применение принципа сифона, о котором он узнал из старой отцовской книжки. В январе случилась оттепель, и под горкой, с которой катались мальчики, образовался маленький пруд. Это было плохо, потому что, скатываясь по льду, набираешь большую скорость. Потом санки попадают в лужу, и тебя обливает грязной водой. Девочки на своих высоких санках съезжали с горки медленнее, и у них все сходило благополучно. Но ведь ни один мальчик из гордости не сядет на такие санки. Все продолжали скатываться, лежа на животе, промокали и покрывались грязью. Тогда появился Роб с шлангом для поливки сада и объявил, что он собирается откачать воду. Его товарищи – в том числе мальчики старше его, ходившие в ту же школу, стали над ним смеяться. Вокруг лужи было возвышение больше чем на фут, и все хорошо знали, что вода не течет в гору. Роб положил шланг на землю, велел одному из мальчиков заткнуть конец пальцем, а сам начал наливать воду в другой, пока весь шланг не наполнился. Уже тогда – по* *природе своей – демонстратор, Роб взял этот конец и вместо того, чтобы просто положить его на землю, перекинул шланг через высокий забор, который отделял дорогу от канавы. Вода потекла через сифон. Это, вероятно, была первая публичная научная победа Вуда*».

Итак, вода сама течет по трубке или шлангу, если их нижний конец находится ниже уровня воды в верхнем сосуде. При этом должны выполняться два условия: вода полностью, без воздушных участков, заполняет шланг или трубку и высота ее подъема в самом высоком месте не превышает 10 метров. Откуда взялось второе ограничение? Давайте разберемся с ним, а уж потом продолжим обсуждать нашу помпу.

Но вначале отдадим должное человеку, который открыл свойства сифона. Это древнегреческий изобретатель, математик и механик Ктесибий (Κτησιβίοζ или Ctesibius). Он считается первым заведующим Александрийского музея (или мусейона), т.е. храма Муз. Этот финансируемый древнеегипетским элинистическим государством религиозный исследовательский, учебный и культурный центр был основан в начале 3 века до н. э. В его состав входила и знаменитая Александрийская библиотека. Труды самого Ктесибия до нас не дошли, но они описаны его учеником Героном, а его изобретения известны также по находкам сохранившихся устройств. Кроме сифона, Ктесибий изобрел гидравлический орга́н, водяные часы, пневматический самострел и насос, который до сих пор используют все велосипедисты, естественно, в более современном исполнении.

Такой насос использовался и для поднятия воды из колодцев, а это всегда было очень важным делом. Кроме снабжения водой для питья и орошения, он применялся и для откачки воды из первых шахт, которые без осушения просто бы затопило. Вдобавок Ктесибий на основе все того же насоса сделал пожарную помпу. В то время придумали немало механических устройств для поднятия воды, вроде водяного колеса и архимедова винта. До этого воду поднимали на веревках, иногда с помощью ворота. Поднимали ведрами или другими емкостями вроде кожаных мешков. А вот устройство, называемое сакиэ, поднимало воду еще во времена фараона Рамзеса. Со временем для подъема воды начали применять паровые машины, потом электромоторы.

Рис. 2. Современный электрический термопот

Впрочем, нас интересует не сколько техника, сколько лежащая в ее основе физика. Поэтому приглядимся к насосам, создающим разрежение воздуха для всасывания воды и ее подъема. Уже насос Ктесибия был прообразом вакуумного поршневого насоса, появившегося почти 2000 лет спустя. Обратим внимание на слово «вакуумного». Вакуум или пустота был предметом жарких споров в античности и в средневековье. Естественно, не научных, а философских или натурфилософских. т.е. не основанных на опыте и фактах. В результате Аристотель (384–322 до н.э.) и его последователи, за которыми стоял авторитет церкви, пришли к выводу, что *природа не терпит пустоты* (этот принцип кратко именуется *horror vacui*). Впрочем, в 1277 году богословы Сорбонны, возглавляемые епископом Парижа Э.Тампье, пришли к заключению, что отрицание всякой возможности существования вакуума ограничило бы всемогущество Божие. Специальным постановлением пустота была отнесена к категории *causus divini* – явлений, не существующих в природе, но возможных для Бога. Этой боязнью пустоты и объясняли работу насоса, всасывающего воду (но не нагнетательных насосов, создающих избыточное давление). Если бы вода не поднималась по трубе вверх, то там образовалась бы столь нелюбимая природой пустота. Поэтому воде не остается ничего иного, как подниматься, заполняя собой место, которое в противном случае занял бы этот гадкий вакуум.

Однако жизнь любит потешаться над любителями умозрительных рассуждений.

В своих «Беседах», вышедших в 1638 году, Галилей отмечал, ссылаясь на опыт флорентийских водопроводчиков, что существует максимально возможная высота, на которую можно поднять воду насосами такого типа. И высота эта всегда одна и та же и составляет примерно 18 локтей. На бóльшую высоту воду приходится поднимать в несколько этапов: вначале на доступную промежуточную высоту, затем это повторяется столько раз, сколько необходимо. Вывод, сделанный Галилеем: сила боязни пустоты ограничена.

Дальнейшие исследования после смерти Галилея продолжил его ученик Эванджелиста Торричелли. Он предложил другому ученику и впоследствии биографу Галилея Винченцо Вивиани заменить воду на куда более тяжелую ртуть. Тот в 1643 году заполнил ртутью запаянную с одного конца длинную стеклянную трубку, заткнул отверстие пальцем и погрузил открытый конец трубки в тазик со ртутью. А затем убрал палец, позволив ртути перетекать из вертикальной трубки в тазик. Она и вытекла, но не вся – в трубке остался столбик ртути высотой около 28 дюймов, или 76 сантиметров в современных единицах измерения. А над ней сквозь прозрачные стенки виднелась та самая якобы невозможная пустота. Ну как виднелась? Вакуум оказался прозрачным, и сквозь него и стенки можно было увидеть освещенные предметы. Любопытно, что вскоре физики, дорвавшись до опытов с таким экзотическим тогда объектом, как вакуум, установили, что звук вакуум не пропускает.

К опытам подключился сам Торричелли и через год установил, что высота ртутного столба хотя и незначительно, но меняется в разные дни. И, основываясь на этом наблюдении, ввел понятие атмосферного давления, которое стало стандартным в наши дни. Атмосфера оказывала на ртуть такое давление, которое соответствовала давлению, создаваемому ртутью в приборе, получившим название ртутного барометра. Стандартным атмосферным давлением считается давление ртутного столба высотой 760 миллиметров: $p = 760$ мм рт. ст. По формуле $p = \rho g h$ его можно выразить в метрической система: $p = 101325$ Па. Однако в зависимости от погоды это давление меняется, и барометр информирует нас о его текущем значении. Прибор оказался полезен для предсказания погоды и стал незаменим на кораблях.

Но кто мешает заменить ртуть водой и взять трубку подлиннее? Рассчитаем высоту водяного столба при нормальном атмосферном давлении по формуле Паскаля и получим 10,33 м. Так что для водяного барометра потребуется достаточно высокое здание. Гаспаро Берти оборудовал на фасаде своего дома в Риме подобное устройство, а Эмануэль Маньяно проводил эксперименты с полученным этим конкретным прибором вакуумом над водяным столбом. Впрочем это был тот еще вакуум, давление в этой части было далеко не нулевым и составляло нескольких десятков миллиметров ртутного столба.

Существенно большее разрежение удалось достичь другому физику-любителю, бургомистру Магдебурга Отто фон Герике. Во время пребывания в Регенсбурге в 1654 году он узнал об опытах Торричелли. Около 1657 года Герике установил в Магдебурге грандиозный водяной барометр. Он состоял из длинной медной трубки, прикрепленной к наружной стене трехэтажного дома Герике. Нижний ее конец был погружен в сосуд с водой, а верхний был снабжен краном и мог быть соединен с воздушным насосом. После откачивания воздуха вода в трубке поднялась до высоты 19 локтей.

Вскоре при помощи этого прибора Герике нашел, что атмосферное давление постоянно изменяется, почему он и назвал свой барометр Semper vivum – *всегда живой*. Потом, заметив соотношение между высотой воды в трубке и состоянием погоды, он назвал его Wettermännchen – *погодный человечек*. Для большего эффекта на поверхности воды в стеклянной трубке, вставленной в верхней части барометра (чтобы уровень воды был виден), плавал поплавок в виде человеческой фигурки с рукой, указывающей на табличку с надписями, соответствующими различным состояниям погоды. В 1660 году прибор удивил жителей Магдебурга, предсказав сильную бурю за два часа до ее начала.

Теперь можно вернуться к нашему сифону. Ограничение на высоту подъема трубки связано с атмосферным давлением. Именно оно не позволяет образоваться внутри трубки участку, ничем не заполненному или заполненному даже не вакуумом, а водяным паром с очень низким давлением. Но атмосферное давление эквивалентно давлению 10,33 м водяного столба. При попытке подъема шланга на большую высоту в нем образуется участок с пустотой, и жидкость перестанет течь по сифону.

Разобравшись с принципом работы сифона, поговорим о водяной помпе. Как бы то ни было, ее высота заведомо меньше 10 метров и сифон в верхней части прекрасно работает. Поэтому нам надо поднять воду до высоты отверстия, из которого она вытекает. Дальше через более высокий участок изогнутой трубки воду переправит сифон, и для этого не понадобится дополнительного избыточного давления. Точнее понадобится, но только на заполнение водой сифона при прохождении самой первой порции воды. Когда же вода перестанет вытекать, она выльется из сифона. Уровень воды в трубке будет близок к уровню отверстия, из которого наливается вода в подставленную емкость.

В результате, для того чтобы вода начала течь из помпы, в ней надо создать избыточное давление, которое в миллиметрах водяного столба равно или превышает высоту самого высокого, горизонтального участка трубки в помпе относительно уровня жидкости. А когда она прекращает вытекать, остаточное давление оказывается равным высоте отверстия, из которого вытекает вода, относительно нового уровня воды, который понизился при наливании.

Что же поднимает воду вверх по трубке? Избыточное давление воздуха в сосуде – результат его нагнетания внутрь с помощью помпы. Высоту поднятия воды можно узнать по той же формуле Паскаля. А можно просто измерить избыточное давление в миллиметрах водяного столба, тогда каждые избыточные 10 мм вод. ст. обеспечат подъем воды на 1 см.

Если мы вскрыли новую бутыль с водой и вставили в нее помпу, то воду надо поднять на сравнительно небольшую высоту, скажем 10 см. Допустим, еще 5 см понадобится на заполнение сифона. Для всего этого достаточно обеспечить избыточное давление порядка 150 мм вод. ст. в небольшом объеме воздуха над уровнем воды в бутыли. Этого можно добиться одним энергичным нажатием на помпу.

По мере расходования воды ее уровень понижается. Когда воды в бутыли мало и ее уровень чуть выше дна, поднимать воду приходится на бóльшую высоту – около 50 см. Соответственно, потребуется избыточное давление в 550 мм вод. ст. Оно приблизительно вчетверо больше давления в начале эксплуатации бутыли, но все еще мало по сравнению с атмосферным давлением, равным 10330 мм вод. ст. Понятно, что избыточное давление в 5% атмосферного легко выдержит обычная стеклянная бутылка. Приблизительно такое же давление создается просто налитой в бутыль водой.

Есть еще один фактор, связанный с опустошением бутыли. Нам не только приходится создавать большее избыточное давление, но и обеспечивать его в существенно большем объеме почти пустой бутыли объемом около 20 литров. В результате при наливании из почти пустой бутыли нам не обойтись парой нажатий на помпу. Их потребуется гораздо больше только для того, чтобы вода начала течь из трубки. Это нетрудно проверить на опыте. Если вода налита в бутыль почти доверху, то одного нажатия достаточно для того, чтобы в подставленный сосуд налилось немного воды. Если уровень немного ниже середины, то для этого потребуется уже три нажатия. Если воды совсем мало, то качать надо больше. Естественно, не стоит делать паузы между качками – ведь сосуд далеко не герметичный и избыточное давление понемногу уменьшается за счет воздуха, просачивающегося наружу.

И вот вода потекла, но почему-то не спешит прекращать это делать. Стоп, нам ведь надо было налить всего 100 граммов воды, а стакан продолжает наполняться. Увы, это плата за конечный объем воздуха, загоняемый внутрь сосуда при одном нажатии.

Давайте посмотрим, как объем наливаемой жидкости зависит от ее уровня в бутыли. Для этого проделаем несложные оценки. Начнем с того, что введем некоторые обозначения. Обозначим давление воздуха в сосуде буквой p, атмосферное давление – этой же буквой с нижним индексом 0, т.е. p_0. Объем воздуха в сосуде обозначим буквой V, а объем воздуха, накачиваемый при одном качке, – V_0. Обозначим буквой h высоту, на которую помпа поднимает воду, т.е. разность высот отверстия для воды и уровня жидкости, а S – площадь поверхности воды. Ясно, что величины S, p_0 и V_0 постоянны, а p и V меняются в зависимости от уровня жидкости (как естественно меняется и h).

Нажмем на помпу столько раз, сколько понадобится, чтобы вода начала вытекать. В сосуде создается минимальное избыточное давление, необходимое для наливания и равное $\rho g h$. Очевидно, оно не превышает давления полуметра водяного столба и существенно меньше атмосферного давления, которое больше давления 10 метров водяного столба. Иными словами, давление в сосуде будет очень слабо превышать атмосферное. Сделаем еще один качок помпой. При этом мы загоним воздух объемом V_0 в сосуд объемом V, а их давления и плотности были почти равны. В результате мы увеличим избыточное давление на некоторую величину, которую мы обозначим Δp. Произведение давления газа на занимаемый объем постоянно при неизменной температуре газа – это закон Бойля–Мариотта. И хотя температура воздуха при качании может незначительно меняться, мы можем применить этот закон для оценки величины Δp. Действительно, в сосуде объемом V был воздух с давлением p, качок помпы добавил воздух объемом V_0 с давлением p_0. Сжавшись, воздух занял объем V и его давление равно $p + \Delta p$. Из закона Бойля–Мариотта получаем $pV + p_0V_0 = (p + \Delta p)V$. Отсюда и получаем оценку:

$$\Delta p = \frac{p_0 V_0}{V}.$$

Возросшее давление и заставляет воду выливаться, ее уровень в бутыли уменьшается. Выливание прекращается после того, как уровень опустится на Δh. Объем вылившейся воды равен $S\Delta h$ – это и есть объем воды, наливаемый за один качок.

Но почему выливание прекращается в какой-то момент? Это результат совместного действия двух причин. Первая заключается в том, что по мере опускания уровня воды объем, занимаемый воздухом в сосуде, возрастает и давление воздуха из-за этого падает. Вторая состоит в том, что избыточное давление, необходимое для того, чтобы вода выливалась, увеличивается по мере опускания уровня. Когда давление в сосуде сравняется с минимальным избыточным давлением, необходимым для выливания воды, этот процесс прекратится. Мы пока не знаем, одинаково ли важны обе причины или одна из них вносит львиную долю в их совместное действие, а вторая дает всего лишь маленькую добавку. Попробуем разобраться.

Еще раз призовем на помощь закон Бойля–Мариотта. Воздух в сосуде имел объем V и давление $p + \Delta p = p + p_0V_0/V$. Вода перестала вытекать, когда он занимал объем $V + S\Delta h$ и имел давление $p + \rho g \Delta h$. Напомним, что избыточное давление, требуемое для поднятия выливаемой воды, немного увеличилось из-за того, что ее надо было поднимать на чуть большую высоту. В соответствии с законом Бойля–Мариотта,

$$pV + p_0V_0 = (V + S\Delta h)(p + \rho g \Delta h).$$

Разделим обе части уравнения на pV и получим

$$1 + \frac{p_0 V_0}{pV} = \left(1 + \frac{\Delta h}{H_1}\right)\left(1 + \frac{\Delta h}{H_2}\right).$$

Здесь мы ввели два новых обозначения. Первое $H_1 = V/S$ – это высота слоя воздуха в сосуде над водой. Она не может превышать полуметра просто из-за ограничения высоты сосуда. Второе $H_2 = p_0/(\rho g)$ – это высота водяного столба, обеспечивающего атмосферное давление, т.е. приблизительно 10,3 м. Поскольку H_2 существенно превышает H_1, то при любом Δh второй сомножитель в правой части нашего уравнения существенно ближе к единице, чем первый. Вот мы и разобрались в том, какой эффект самый главный: изменение объема воздуха куда важнее изменения величины избыточного давления. Точнее, важнее более чем в 20 раз. Поэтому мы забываем о более слабом эффекте и получаем окончательную оценку

$$\Delta h = \frac{H_1 p_0 V_0}{pV},$$

которая упрощается до

$$\Delta h = \frac{V_0}{S},$$

если вспомнить, что $p \approx p_0$ и $H_1 = V/S$. Объем наливаемой за один качок воды получается близким к объему помпы V_0.

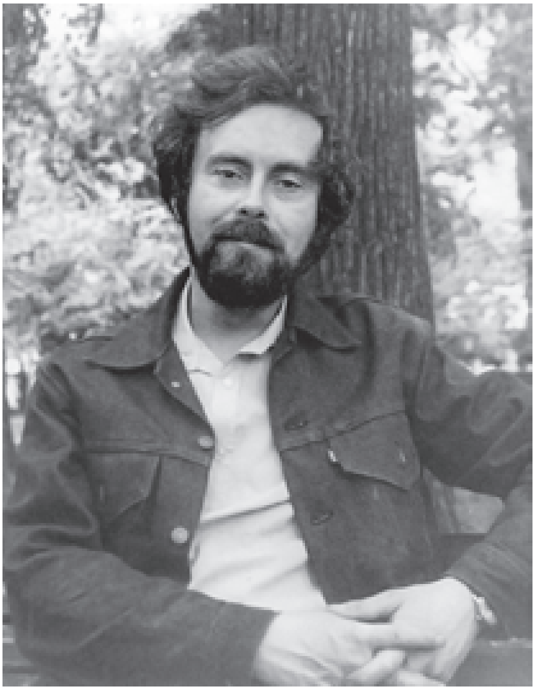
Такой же результат можно получить и из рассуждений об энергии. Каждый качок помпы требует совершения работы, равной произведению объема помпы на избыточное давление. Когда вода начинает течь, последнее равно $\rho g h$. Эта работа идет на поднятие воды, причем для того чтобы поднять единичный объем воды, надо затратить энергию $\rho g h$. Отсюда получаем, что объем поднятой, а потом вылитой воды равен V_0. И действительно, опыт подтверждает полученный результат. Один качок нашей помпы наливает около 120 мл воды независимо от ее уровня. Так что при накачивании воздуха лишняя внимательность явно не помешает – ведь остановить процесс выливания воды невозможно. Впрочем, мы можем нагнать в сосуд и меньшее количество воздуха, просто не доведя качок до самого конца. Однако налить совсем мало воды не получится и в этом случае. Легко понять, что у нашей помпы есть минимальный объем воды, который можно налить с ее помощью. Это объем сифона, т.е. части трубки, расположенной выше наливного отверстия. И хотя это не особо важно при пользовании помпой, стоит иметь в виду эту деталь.

В заключение нашей оценки стоит сделать одно замечание, которое нетерпеливый читатель может пропустить. Мы сделали простую и понятную оценку объема воды, наливаемой одним качком, исходя из закона сохранения энергии. Каждый хороший физик должен уметь делать подобные оценки даже в уме. А зачем мы привели еще и более сложный вывод, основанный на применении закона Бойля–Мариотта? Ведь чем проще получен ответ, тем лучше. Дело в том, что мы хотим продемонстрировать возможные потенциальные проблемы при таком оценивании «на пальцах». Оно неявно включает в себя отбор эффектов, которые надо учитывать. Отбор этот основан на опыте и интуиции, а они могут обмануть или не сработать в качественно других обстоятельствах.

Например, если бы кто-то изготовил подобную помпу высотой с многоэтажный дом и качал с ее помощью воду, уровень которой находился бы не очень высоко, то каждый качок выдавал бы меньшее количество воды, чем дает оценка по энергии. Применив более нудный, но корректный расчет на основе закона Бойля–Мариотта, мы узнали бы, что для этой супер-пупер-помпы величина H_1 существенно превышает H_2. Теперь первый сомножитель в правой части нашего уравнения существенно ближе к единице, чем второй. Важность эффектов поменялась мастами – изменение величины избыточного давления стало важнее изменения объема воздуха. Поэтому объем воды за один качок надо оценить теперь как $V_0 H_2 / H_1$, что меньше оценки для обычной помпы.

Почему же простая оценка, основанная на сохранении энергии, нас подвела? Да потому, что энергия в помпе запасается еще и в виде энергии сжатого воздуха. Ее обеспечивают те самые начальные качки, при которых вода не течет. А сжатый воздух обладает дополнительной энергией. Это подтвердит каждый, кто накачивал шину автомобиля или велосипеда ручным насосом, и тот, кто надувал надувной матрас. Просто в обычной помпе при наливании воды эта энергия меняется слабо, а в придуманной для примера супер-пупер-помпе с ее огромным резервуаром основная часть работы, совершаемой при качке, будет запасена именно в виде энергии сжатого газа и только небольшая часть (равная $H_2 / (H_1 + H_2)$) пойдет на подъем воды. Так что простые и красивые оценки впечатляют, но могут иногда и подвести, особенно в нестандартных условиях.

К 80-летию Николая Борисовича Васильева



Н.Б.Васильев, 1982 год (фото Л.Бодневой)

В этом году исполнилось бы 80 лет Николаю Борисовичу Васильеву, без которого невозможно представить математическое образование, просвещение, олимпиадное движение нашей страны, автору множества математических задач и статей – и просто очень хорошему и светлому человеку, которого многие любили и всегда вспоминают с теплом, нежностью и признательностью.

Н.Б. Васильев родился в Москве 8 августа 1940 года и всю жизнь прожил в одном из красивейших уголков столицы – на Софийской набережной, прямо напротив Кремля. Родители его, Борис Федорович Васильев и Нина Николаевна Лессиг, были инженерами-строителями. Детство Николая Борисовича прошло среди книг, в кругу широко образованных людей, любящих и глубоко знающих искусство, особенно музыку. Вся обстановка семьи и семейное окружение привили ему безупречный вкус и тонкое понимание красоты. Он ценил красоту и в искусстве, и в математике, которой увлекся в старших классах школы.

В 1957 году Николай Борисович окончил школу – с серебряной медалью – и одновременно музыкальное училище при Московской консерватории. Нужно было выбирать: музыка или математика. Он выбрал математику, но музыка всегда оставалась с ним.

Математическая жизнь Н.Б.Васильева состояла из двух потоков – научного и просвещенческого. По окончании университета и аспирантуры он поступил на работу в межфакультетскую лабораторию математических методов в биологии МГУ, где и трудился всю жизнь. Им написано более двадцати научных статей по различным разделам современной математики. Но, постоянно занимаясь наукой, не меньшую, а возможно, и куда большую часть своего времени и сил он отдавал математическому просвещению. Еще первокурсником механико-математического факультета МГУ он вел кружки для школьников, работал в оргкомитете Московской математической олимпиады – и занимался этим многие годы. Придумывал задачи, участвовал в составлении вариантов и проверке работ, в обсуждении результатов и присуждении премий. С 1963 года, с возникновения Всесоюзной заочной математической школы, принимал участие в разработке ее программ, вместе с другими известными математиками написал несколько популярных книжек по математике, предназначенных для учеников ВЗМШ. Некоторые из них выдержали по нескольку изданий и были переведены на иностранные языки. Немалую роль Н.Б.Васильев сыграл и в развитии летних математических школ, и в организации Турнира городов – сочинял задачи, читал лекции, был членом жюри различных олимпиад и конференций. Беседовал с докладчиками, объяснял им возможности развития тем их докладов, был всегда внимательным, доброжелательным и заинтересованным.

Когда в конце 60-х годов возникла идея создания научно-популярного физико-математического журнала для школьников, Николай Борисович активно подключился к этой работе. Он был бессменным членом редколлегии и постоянным автором «Кванта». По его инициативе в журнале возник один из главных и, пожалуй, самых знаменитых разделов – «Задачник «Кванта», которым Николай Борисович неизменно руководил с момента основания журнала и до конца своих дней (его не стало 28 мая 1998 года).

Задачи были главной страстью Н.Б.Васильева. Как и в музыке и вообще в искусстве, в задачах он особенно ценил подлинную красоту и оригинальность идеи. Он был выдающимся композитором математических задач. Его задачи – а их многие десятки – выделяются отточенностью формулировок и решений, глубиной и связями с «большой» математикой. Кроме того, он как никто умел увидеть и выявить изюминку в присланной другим автором задаче, найти наиболее привлекательную формулировку, обнаружить возможные обобщения и дальнейшее развитие сюжета задачи, ясно и красиво изложить решение, зачастую сопроводить его комментариями и отсылками к литературе – для тех, кто захочет глубже разобраться в проблеме. Все это сделало «Задачник «Кванта» тем, что он есть: огромным корпусом глубоких и содержательных задач, под влиянием которых выросли целые поколения ученых.

Николай Борисович также автор более тридцати статей, без сомнения входящих, в число лучших публикаций «Кванта». Многие статьи написаны в соавторстве с другими математиками. Умение увидеть и выделить главное сочеталось в нем с недюжинными литературными способностями; Васильев обладал редкостным даром прозрачно и четно излагать самые сложные математические сюжеты. Зная это его умение, многие математики приносили в редакцию свои статьи и просили Николая Борисовича помочь довести их «до ума». Он никогда в этом не отказывал, а в некоторых случаях статья настолько улучшалась, что авторы просили его стать их соавтором.

На протяжении без малого сорока лет журнал «Квант» и Николай Борисович Васильев были неразрывно связаны. Трудно найти номер журнала, в котором не

Не будет преувеличением сказать, что каждый молодой человек, кто в течение последних тридцати лет начал в той или иной форме свой путь в математику, одним из первых слышал или читал имя Николая Борисовича Васильева. Оно было известно всем – и тем, кто участвовал в различных математических олимпиадах, и тем, кто интересовался «внеклассными» математическими статьями и книжками, и тем, кто увлекался причудливой игрой ума в решении математических задач.

Этого человека просто боготворили юные, делавшие лишь первые шаги в математике, они гордились возможностью вместе с ним устраивать математические соревнования, придумывать задачи, обсуждать темы и содержание статей. Его горячо любили и высоко ценили ровесники – за преданность науке и бескорыстное служение образованию молодежи, за честность человеческих отношений и чудесный характер, за то, что с ним было надежно работать. Он пользовался бесспорным авторитетом у более старших корифеев математики, многих из них уже нет с нами, – за исключительную компетентность и многогранную образованность, за талант ученого и преподавателя, популяризатора и организатора, за то, что во главу угла всегда ставил только интересы дела. И практически все называли его тепло и по-семейному – просто Коля.

Н.Х.Розов, 1998 год

Вот одно из моих светлых воспоминаний о Коле. Как-то в разговоре с ним я посетовал, что геометрические задачи на экстремум не используют для обучения анализу. Коля покачал головой, но ничего не сказал. Через пару дней я увидел Колю, спешащего ко мне, озаренного счастливой улыбкой. Оказалось, он придумал нестандартную задачу на экстремум, которая имеет красивые геометрическое и аналитическое решения. Вот эта задача: *В рюмку конической формы опущен шарик от пинг-понга. Размеры конуса и шарика заданы. Требуется найти высоту самой высокой точки шарика.* Удивительно изящная задача!

В.М.Тихомиров, 2020 год

было бы его материалов, – «Квант» воистину был огромной частью жизни Николая Борисовича.

Избранные задачи Н.Б.Васильева

Приводим подборку задач, опубликованную в статье А.А.Егорова «Николай Борисович Васильев» в журнале «Математическое просвещение» в 1999 году.

1 («Автобусная задача»). В автобусе без кондуктора ехали k человек. Известно, что ни у кого из васажиров не было монет крупнее 20 коп. Известно также, что каждый пассажир уплатил за проезд и получил сдачу. Докажите, что наименьшее число монет, которое могло для этого потребоваться, равно $k+\left[\frac{k+3}{4}\right]$. (В 1961 году в обращении были медные монеты достоинством в 1, 2, 3 и 5 коп., а также «серебряные» – белые монеты в 10, 15 и 20 коп. В автобусе без кондуктора полагалось бросить в кассу 5 коп. в любом наборе и оторвать билет. Можно было также бросить, например, 20 коп. и оторвать 4 билета.)

(XXIII Московская математическая олимпиада)

2 («Коробочка Васильева»). Как надо расположить в пространстве прямоугольный параллелепипед, чтобы площадь его проекции на горизонтальную плоскость была наибольшей?

(XXV Московская математическая олимпиада)

3 («Гуляющие джентльмены»). По аллее длиной 100 м идут три джентльмена со скоростями 1, 2 и 3 км/ч соответственно. Дойдя до конца аллеи, каждый из них поворачивает и идет назад с той же скоростью. Докажите, что найдется отрезок времени в 1 мин, когда все трое будут идти в одном направлении.

4 («Квадраты в прямоугольнике»). В прямоугольник со сторонами 20 и 25 бросают 120 квадратов со сторой 1. Докажите, что в прямоугольник можно поместить круг диаметра 1, не пересекающийся ни с одним из квадратов

(Первая Всероссийская олимпиада, 1961 год, Москва)

5 («Жук»). На плоскости нарисована сеть, образованная из правильных

Н.Б.Васильев (слева) и А.А.Егоров, 1959 год (фото Е.Ермаковой)

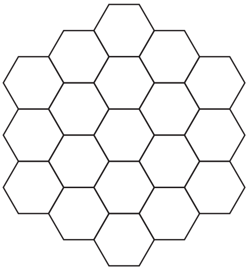


Рис. 1

шестиугольников со стороной 1 (рис.1). Жук, двигаясь по линиям сети, прополз из некоторого узла A в некоторый узел B по кратчайшему пути, равному 100. Докажите, что половину всего пути он полз а одном направлении

(Четвертая Всероссийская олимпиада, 1964 год, Москва)

6 («Игра Васильева»). Написано 20 чисел: 1, 2, …, 20. Двое играющих по очереди ставят перед этими числами знаки «+» или «–» (знак можно ставить перед любым свободным числом). Первый стремится к тому, чтобы после расстановки всех 20 знаков сумма всех чисел была как можно меньше по модулю. Какую наибольшую по модулю сумму может обеспечить себе второй игрок?

(Шестая Всероссийская олимпиада, 1966 год, Воронеж)

7 («Фигуристы»). После выступлений 20 фигуристов каждый из 9 судей по своему усмотрению распределяет среди них места с 1-го по 20-е. Оказалось, что у кадого фигуриста места, присвоенные ему разными судьями, отличаются не более чем на 3. Подсчитаем суммы мест, полученных каждым фигуристом, и расположим эти числа в порядке возрастания: $c_1 \le c_2 \le c_3 \le \ldots \le c_{20}$. Какое наибольшее значение может иметь c_1?

(Вторая Всесоюзная олимпиада, 1968 год, Ленинград)

8 («Разноцветный многоугольник»). Вершины правильного n-угольника покрашены несколькими красками (каждая одной краской) так, что точки одного и того же цвета служат вершинами правильного многоугольника. Докажите, что среди этих многоугольников найдутся два равных.

(Четвертая Всесоюзная олимпиада, 1970 год, Симферополь)

9 («Нервные сети»). В бесконечной цепочке нервных клеток каждыя клетка может находиться в одном из двух состояний: «покой» и «возбуждение». Если в данный момент клетка возбудилась, то она посылает сигнал, который через единицу времени (скажем, через одну миллисекунду) доходит до обеих соседних с ней клеток. Каждая клетка возбуждается в том и только в том случае, если к ней приходит сигнал от одной из соседних клеток; если сигналы приходят одновременно с двух сторон, то они погашаются, и клетка не возбуждается. Например, если в начальный момент времени $t = 0$ возбудить три соседние клетки, а остальные оставить в покое, то возбуждение будет распространяться, как показано на рисунке 2. (Возбужденные клетки – черные.)

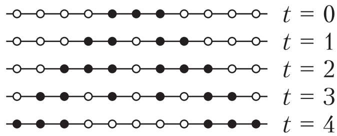


Рис. 2

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ возбуждена только одна клетка. Сколько клеток будет находиться в возбужденном состоянии через 15 мсек? через 65 мсек? через 1000 мсек? через t мсек?

Что будет в том случае, если цепочка не бесконечная, а содержит всего N клеток, соединенных в окружность (рис.3), – будет ли возбуждение поддерживаться бесконечно долго или затухнет?

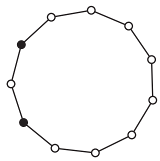


Рис. 3

(«Задачник «Кванта», задача М19)

10 («Параллелепипеды»). В пространстве заданы 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, для которых все эти точки служат вершинами?

(Седьмая Всесоюзная олимпиада, 1973 год, Кишинев)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

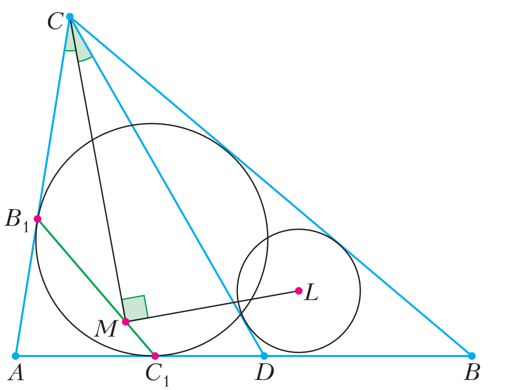
Задачи М2614–М2617, Ф2621–Ф2624

М2614. В таблице $n \times n$ разрешается переставлять местами строки, а также переставлять местами столбцы. В некоторых k клетках таблицы расставляют звездочки. При каком наибольшем k всегда можно добиться того, чтобы все звездочки стали находиться по одну сторону от главной диагонали (при этом на самой главной диагонали звездочек тоже не должно быть)?

П.Кожевников

М2615. В треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон CA и AB в точках B_1 и C_1 соответственно (см. рисунок). На стороне AB выбрана произвольная точка D. Точка L – центр вписанной окружности треугольника BCD. Пусть биссектриса угла ACD пересекает прямую B_1C_1 в точке M. Докажите, что $\angle CML = 90°$.

Чан Куанг Хюнг (Вьетнам)



М2616. Докажите, что если $p \ge 5$ – простое число, то число

$$\left(\frac{(p-1)!}{1}\right)^p + \left(\frac{(p-1)!}{2}\right)^p + \ldots + \left(\frac{(p-1)!}{p-1}\right)^p$$

делится на p^3.

И.Вайнштейн

М2617*. Плоскость покрашена в 100 цветов. Докажите, что найдутся три точки одного цвета, являющиеся вершинами треугольника площади 1.

В.Брагин

Ф2621. Утром 21 марта в Москве длина тени елочки высотой в 1 метр в некоторый момент времени в три раза больше ее высоты, и это отношение уменьшается. Сколько времени прошло с момента восхода Солнца? Какова скорость изменения длины тени?

С.Варламов

Ф2622. Водитель легкового автомобиля массой $M = 1000$ кг в дальней поездке по прямой (из Москвы в Белгород) возле километрового столба с отметкой 100 км установил на счетчике пути значение 000,0 км. Проезжая мимо столба с отметкой 200 км, он увидел, что счетчик пути показал 101,0 км. Водитель остановил машину, подкачал все колеса от давления $p_1 = 1{,}1$ атм до положенных $p_2 = 2$ атм и продолжил путь. Возле столба с отметкой 300 км счетчик пути показал 201,0 км. Водитель удовлетворенно хмыкнул и поехал дальше, не останавливаясь. Каков диаметр колес его автомобиля, если ширина покрышек $d = 17{,}5$ см? Нагружены все колеса одинаково.

А.Козлевич

Ф2623. В воде глубокого озера на глубине $h = 10$ м на тонкой нитке удерживается воздушный шарик с тонкой нерастяжимой пластиковой оболочкой. Радиус шарика $R = 10$ см. Нитка рвется. Оцените: а) начальное ускорение шарика; б) скорость, которую он приобретет, приближаясь к поверхности воды.

С.Шариков

Ф2624. Суточный «ход» температуры воздуха летом на высоте 2 м (стандартная высота для метеорологических измерений) составляет в Сахаре 30°. Максимальная температура +40 °С. Погода устойчивая, небо безоблачное. Оцените толщину слоя воздуха на поверхности пустыни, вовлекаемого в конвекцию в течение суток. Солнечная постоянная равна 1370 Вт/м^2.

С.Пустынный

Решения задач М2602–М2605, Ф2609–Ф2612

М2602. *Для данного натурального k выпуклый многоугольник назовем k-треугольным, если он является пересечением некоторых k треугольников.*

а) При каком наибольшем n существует k-треугольный n-угольник?

б) При каком наибольшем n любой выпуклый n-угольник является k-треугольным?

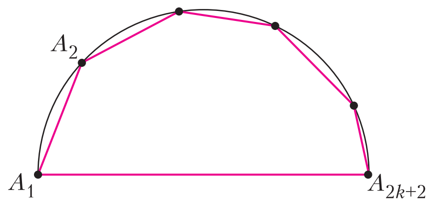
Ответ: а) $3k$; б) $2k+1$.

В доказательстве будем использовать следующее *соображение*. Если многоугольник получен как пересечение нескольких треугольников, то он выпуклый и каждая его сторона принадлежит одной из сторон хотя бы одного из треугольников. При этом на каждой из сторон наших треугольников лежит не более одной стороны n-угольника (это следует, например, из выпуклости).

а) Правильный $(3k)$-угольник можно получить как пересечение k правильных треугольников, имеющих общий центр и получающихся друг из друга поворотами на углы, кратные $\dfrac{2\pi}{3k}$.

С другой стороны, если n-угольник получен как пересечение k треугольников, то из соображения выше следует, что n не превышает количества сторон всех треугольников, т.е. $n \le 3k$.

б) Рассмотрим $(2k+2)$-угольник $A_1A_2\ldots A_{2k+2}$, вписанный в полуокружность с диаметром A_1A_{2k+2} (см. рисунок), и покажем, что он не является k-треугольным.



Сторону A_1A_{2k+2} назовем *длинной*, а остальные стороны – *короткими*. Если треугольник накрывает этот многоугольник, то не более двух из коротких сторон лежат на стороне треугольника. Таким образом, количество треугольников должно быть не меньше половины количества коротких сторон, т.е. не меньше $k+1$.

Покажем, как представить любой выпуклый $(2k+1)$-угольник P в виде пересечения одного треугольника и $k-1$ углов. Тогда, отрезав от каждого угла достаточно большой треугольник, мы представим P как пересечение k треугольников.

Для каждой из сторон многоугольника P найдется не более одной стороны, параллельной ей. Так как $2k+1$ нечетно, найдется сторона a, для которой нет параллельной стороны. Рассмотрим вершину A, наиболее удаленную от прямой, содержащей сторону a, и пусть b и c – стороны многоугольника P, смежные с A. Тогда при продолжении трех сторон a, b, c образуется треугольник, содержащий P внутри себя. Если все $2k-2$ сторон, отличные от a, b, c, удастся разбить на пары так, чтобы ни в какой паре стороны не были параллельны, то построение углов легко завершить, продлив стороны в каждой паре. При $k \ge 3$ указанное разбиение на пары сторон всегда возможно: рассмотрим пары параллельных сторон $d_1 \parallel e_1, \ldots, d_t \parallel e_t$, а все остальные $2k-2-2t$ сторон (не имеющих парной параллельной стороны) обозначим произвольным образом как d_i, e_i, где $i = t+1, \ldots, k-1$. Тогда $(d_1, e_2), (d_2, e_3), \ldots \ldots, (d_{k-1}, e_1)$ – нужное нам разбиение на пары. Остается рассмотреть лишь случай $k = 2$, т.е. пятиугольник, стороны которого в порядке обхода – a, d, b, c, e, где $d \parallel e$. Но в таком случае нужный треугольник, содержащий P, можно получить при продолжении сторон a, d, c, а угол – при продолжении сторон b и e.

П.Кожевников

М2603. *Для бесконечной последовательности чисел $a_1, a_2, \ldots$ назовем ее первой производной последовательность $a'_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, а ее k-й производной – первую производную ее $(k-1)$-й производной $(k = 2, 3, \ldots)$. Назовем последовательность хорошей, если она и все ее производные состоят из положительных чисел. Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ – хорошие последовательности, то и $a_1b_1, a_2b_2, \ldots$ – хорошая последовательность.*

Пусть $c_n = a_nb_n$, где $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – хорошие последовательности; очевидно, последовательность $\{c_n\}$ состоит из положительных чисел. Далее,

$$c'_n = a_{n+1}b_{n+1} - a_nb_n = \\ = a_{n+1}(b_{n+1} - b_n) + (a_{n+1} - a_n)b_n,$$

т.е.

$$c'_n = a_{n+1}b'_n + a'_{n+1}b_n. \qquad (*)$$

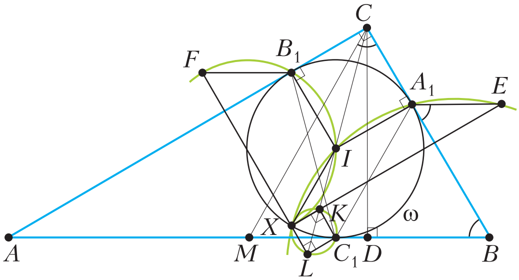
Так как в правой части $(*)$ оба слагаемых положительны, то $\{c'_n\}$ состоит из положительных чисел. Более того, мы видим, что первая производная произведения двух хороших последовательностей представляется в виде суммы произведений пар хороших последовательностей.

Пользуясь тем, что производная суммы – это сумма производных, получаем, что первая производная последовательности $\{c'_n\}$ состоит из положительных чисел и представляется в виде суммы нескольких произведений хороших последовательностей.

Продолжая так далее, получаем, что k-я производная последовательности $\{c_n\}$ для любого k состоит из положительных чисел.

Р.Салимов

М2604. *Дан треугольник ABC с прямым углом C (см. рисунок). Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC, а D – основание высоты, проведенной из C на AB. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается его сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Пусть E и F – точки, симметричные точке C относительно прямых C_1A_1 и C_1B_1 соответственно. Пусть K и L – точки, симметричные точке D относительно прямых C_1A_1 и C_1B_1 соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольничков A_1EI, B_1FI и C_1KL имеют общую точку.*



Прямая C_1A_1 параллельна внешней биссектрисе угла B, поэтому симметрия относительно C_1A_1 переводит отрезок A_1C в отрезок A_1E, параллельный AB. Аналогично, $B_1F \parallel AB$. Заметим также, что $A_1E = A_1C = B_1C = B_1F = r$, где r – радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Пусть M – середина AB. Пусть X – такая точка на окружности ω, что векторы $\overrightarrow{IX}$ и $\overrightarrow{CM}$ сонаправлены. Заметим, что $\angle EA_1I = 90° + \angle EA_1B = 90° + \angle CMB = 90° + \angle BCM = \angle A_1IX$ и $A_1E = IA_1 = IX$; таким образом, XIA_1E – равнобокая трапеция. Значит, X лежит на окружности (IB_1F) и $EX \parallel A_1I$. Аналогично, X лежит на окружности (IB_1F) и $FX \parallel B_1I$. Остается доказать, что X лежит на окружности (C_1KL).

При симметрии относительно C_1A_1 прямая CD переходит в EK. Так как $CD \perp AB$, то $EK \perp BC$, тем самым прямая EK совпадает с прямой EX. Поскольку $C_1D \perp CD$, в силу симметрии относительно A_1C_1 имеем $C_1K \perp EK$ или $C_1K \perp XK$. Таким же образом показываем, что $C_1L \perp XL$, а значит, точки C_1, X, K, L лежат на одной окружности с диаметром C_1X.

Д.Прокопенко

М2605*. *Для каждого целого числа $n \ge 2$ обозначим через $F(n)$ наибольший простой делитель числа n. Назовем странной парой пару различных простых чисел p и q, для которых не существует целого числа $n \ge 2$ такого, что $F(n)F(n+1) = pq$. Докажите, что существует бесконечно много странных пар.*

Покажем, что существуют бесконечно много странных пар вида $\{2, q\}$, где q – нечетное простое число.

Ниже мы формулируем *лемму*, обеспечивающую достаточные условия для того, чтобы указанная пара была странной. Для нечетного простого q через $ord_q(2)$ обозначим *показатель* числа 2 по модулю q, т.е. наименьшее натуральное число s такое, что $2^s - 1$ делится на q. Дальше будем использовать следующее известное свойство показателя:

число $2^t - 1$ делится на простое q (для некоторого натурального t) тогда и только тогда, когда t делится на $ord_q(2)$.

Лемма. Если некоторые простые $2 < q_1 < q_2$ удовлетворяют равенству $ord_{q_1}(2) = ord_{q_2}(2)$, то пара $\{2, q_1\}$ является странной.

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что $2 = F(n)$ и $q_1 = F(n+1)$; в частности, $n = 2^k$ для некоторого натурального k и $2^k + 1$ делится на q_1. Отсюда следует, что $2^{2k} - 1$ делится на q_1, таким образом, $ord_{q_2}(2) = ord_{q_1}(2)$ является делителем числа $2k$. Следовательно, $2^{2k} - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1)$ делится на q_2. Но $2^k - 1$ не делится на q_2, иначе k делилось бы на $ord_{q_2}(2) = ord_{q_1}(2)$ и $2^k - 1$ делилось бы на q_1, что неверно. Поэтому $2^k + 1$ делится на q_2, откуда $F(n+1) \ge q_2$ – противоречие.

Аналогично (только проще) получим противоречие, предполагая, что $2 = F(n+1)$ и $q_1 = F(n)$. В таком случае $n + 1 = 2^k$, значит, $2^k - 1 = n \vdots q_1$, откуда $ord_{q_2}(2) = ord_{q_1}(2)$ является делителем k. Тем самым, $n = 2^k - 1$ делится на q_2 и $F(n) \ge q_2$ – противоречие. Лемма доказана.

Остается доказать, что существуют бесконечно много непересекающихся пар простых чисел, удовлетворяющих условию леммы.

Пусть $p = 2r - 1 > 5$ – простое число; положим $N = 2^{2p} + 1$. Мы докажем, что:

(1) N имеет хотя бы два различных простых делителя, больших 5;

(2) $ord_q(2) = 4p$ для любого простого $q > 5$, являющегося делителем N.

Таким образом, каждое простое $p > 5$ дает пару нечетных простых, удовлетворяющих условию леммы. Более того, условие (2) показывает, что для различных простых $p > 5$ соответствующие пары не пересекаются.

Чтобы доказать (1), заметим, что N не делится на 3, и запишем $N = (4+1)\cdot(4^{p-1} - 4^{p-2} + \ldots + 1) \equiv 5p \pmod{25}$, откуда N не делится на 25.

Далее разложим N как $N = (2^p + 1)^2 - 2^{p+1} = (2^p - 2^r + 1)(2^p + 2^r + 1)$. Полученные два множителя взаимно просты (так как они нечетны и их разность равна 2^{r+1}) и каждый из множителей больше 5. Поэтому каждый из множителей имеет простой делитель, больший 5. Это доказывает (1).

Чтобы доказать (2), рассмотрим простой делитель $q > 5$ числа N и заметим, что $ord_q(2)$ является делителем $4p$, поскольку $2^{4p} - 1 \vdots N \vdots q$. Если $ord_q(2) < 4p$, то $ord_q(2)$ является делителем $2p$ или $ord_q(2) = 4$. Первое невозможно, так как $2^{2p} - 1 = N - 2 \equiv -2 \pmod{q}$; второе невозможно, поскольку $2^4 - 1 = 15$ не делится на q. Тем самым, (2) установлено и решение завершено.

И.Богданов, Д.Крачун

Ф2609. *Полдень. Солнце в зените. Над горой Килиманджаро летит корабль инопланетян с постоянной горизонтальной скоростью $v = c/\sqrt{3}$ (рис.1). По склону горы бежит тень. При каком значении угла α наклона склона горы к горизонту скорость тени корабля на земле будет минимальной?*

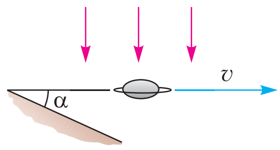


Рис. 1

Введем косоугольную систему координат xOy (рис.2). Ось Ox горизонтальна и совпадает с траекторией движения корабля, а ось Oy наклонена под углом α, т.е. совпадает с поверхностью земли. Пусть в какой-то момент координата корабля x, а координата тени y. Точка с координатой y получена в результате проецирования точки с координатой $x - \Delta x$. Ведь за время, пока свет распространялся от точки с координатой $x - \Delta x$, корабль успел сместиться на Δx. С учетом сказанного можно записать:

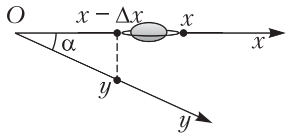


Рис. 2

$$\frac{x - \Delta x}{y} = \cos\alpha, \text{ или } y\cos\alpha = x - \Delta x.$$

Поскольку $\Delta t = \dfrac{y\sin\alpha}{c}$, то

$$\Delta x = v\Delta t = \frac{vy\sin\alpha}{c}.$$

Объединим полученные соотношения:

$$y\cos\alpha = x - \frac{vy\sin\alpha}{c}, \; y\left(\cos\alpha + \frac{v\sin\alpha}{c}\right) = x,$$

$$y = \frac{cx}{c\cos\alpha + v\sin\alpha}.$$

Но

$$x = vt, \; y = v_y t,$$

где v_y – скорость тени. Отсюда

$$v_y = \frac{yv}{x} = \frac{cv}{c\cos\alpha + v\sin\alpha} = \frac{c}{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha}.$$

Введем вспомогательный аргумент:

$$v_y = \frac{c}{2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \dfrac{1}{2}\sin\alpha\right)} = \frac{c}{2\sin(\alpha + \varphi)},$$

где $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$, т.е. $\varphi = 60°$. Скорость тени на земле будет минимальной, если

$$\sin(\alpha + \varphi) = 1, \text{ т.е. } \alpha = 30°.$$

Итак, при заданной скорости корабля скорость тени будет минимальной, когда склон и горизонт образуют угол 30°, при этом скорость тени будет равна $v_y = 0{,}5c$. Это меньше скорости самого корабля.

В.Гребень

Ф2610. *Цилиндр с жесткими стенками с внутренним радиусом R доверху заполнен несжимаемой жидкостью с плотностью ρ. Ось симметрии цилиндра вертикальна. Горизонтальная плоская крышка цилиндра прикреплена к его донышку тонким вертикальным тросом, натянутым с силой F, трос расположен на оси симметрии цилиндра. Этот сосуд раскрутили вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью его симметрии, до угловой скорости ω. Как изменилась сила натяжения троса?*

Если бы боковые вертикальные стенки цилиндра были очень высокими и жидкость не доходила до их верха, то установившаяся со временем свободная поверхности жидкости приняла бы форму параболоида вращения – это известный результат. В данном случае крышка «не пускает» жидкость вверх, поэтому трос натянется сильнее прежнего. Любой участок жидкости, находящийся вблизи крышки на расстоянии x от оси вращения, движется по окружности радиусом x, следовательно, на него действует не равная нуля суммарная сила. Давление в жидкости по мере удаления от оси вращения растет. Пусть это давление вблизи поверхности крышки равно p_x. Рассмотрим небольшой объем жидкости, протяженность которого вдоль радиуса равна Δx, а площадь поперечного к радиусу сечения равна $(\Delta x)^2$. Масса этого выделенного участка жидкости равна $m = \rho(\Delta x)^3$. Он движется с ускорением $a = x\omega^2$, направленным к оси вращения. Следовательно, изменение величины давления вдоль радиуса равно

$$\Delta p = \frac{ma}{(\Delta x)^2} = x \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot \omega^2.$$

Это означает, что давление растет от оси вращения к стенкам по закону

$$p_x = p_0 + x^2 \cdot \rho \cdot \frac{\omega^2}{2},$$

т.е. вблизи оси вращения (и вблизи троса) давление осталось таким же, каким оно было, когда сосуд был неподвижен. Рост давления на расстоянии от оси приводит к появлению дополнительной силы давления жидкости на крышку, равной

$$\Delta F = \int_0^R \frac{2\pi x dx \cdot x^2 \rho\omega^2}{2} = \frac{\pi}{4}\rho\omega^2 R^4.$$

На такую величину и увеличится сила натяжения троса.

Х.Цилиндров

Ф2611. *Два положительных заряда q_1 и q_2 закреплены на расстоянии d друг от друга (рис.1). К зарядам привязана нерастяжимая непроводящая нить длиной L. По нити может скользить без трения маленькое положительно заряженное колечко. Система находится в равновесии. Найдите расстояния от колечка до зарядов в положении равновесия.*

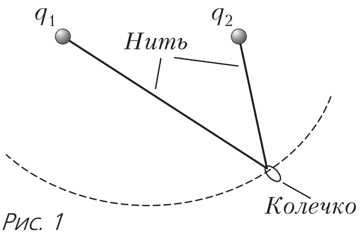


Рис. 1

Кривая, изображенная пунктиром на рисунке 1, – это часть эллипса с фокусами в точках нахождения зарядов q_1 и q_2. Поэтому задачу можно было бы решить, воспользовавшись известными геометрическими свойствами эллипса. Например, его оптическим свойством – луч, вышедший из одного фокуса эллипса, после отражения от поверхности эллипса проходит через другой его фокус.

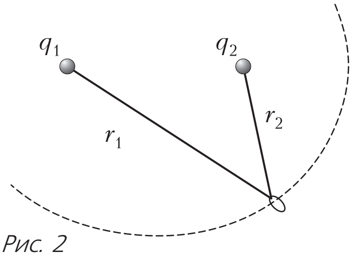


Рис. 2

Но мы пойдем другим путем! Пусть r_1 и r_2 – расстояния от колечка до зарядов q_1 и q_2 соответственно (рис.2). Так как по условию задачи нить нерастяжимая, то $r_1 + r_2 = L$. Как известно, положение равновесия соответствует минимуму потенциальной энергии. Рассмотрим бесконечно малый сдвиг колечка от положения равновесия, характеризующийся бесконечно малой величиной изменения Δr расстояний r_1 и r_2:

$$\Delta r_1 = \Delta r,\ \Delta r_2 = -\Delta r,$$

так что сумма $r_1 + r_2 = L$ остается постоянной. При этом в первом порядке по малости величины Δr изменение потенциальной (электростатической) энергии будет равно

$$\Delta U = -\frac{kqq_1}{r_1^2}\Delta r_1 - \frac{kqq_2}{r_2^2}\Delta r_2 = \\ = kq\Delta r\left(-\frac{q_1}{r_1^2} + \frac{q_2}{r_2^2}\right),$$

где q – заряд колечка. В положении равновесия эта величина должна обращаться в ноль, что дает условие равновесия

$$\frac{q_1}{r_1^2} = \frac{q_2}{r_2^2}.$$

Отсюда, с учетом равенства $r_1 + r_2 = L$, легко получить ответ для равновесных значений r_1 и r_2:

$$r_1 = \frac{\sqrt{q_1}L}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}},\ r_2 = \frac{\sqrt{q_2}L}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}.$$

Эти расстояния не зависят от величины расстояния между зарядами q_1 и q_2.

Поскольку силы, действующие на заряженное колечко со стороны каждого из зарядов, в соответствии с полученным условием равновесия, одинаковы по величине $(F_1 = F_2)$ и трения между нитью и колечком нет, то это означает, что траектория движения колечка вблизи положения равновесия перпендикулярна суммарной силе $\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)$. Иными словами, траектория перпендикулярна биссектрисе угла, который образуют друг с другом участки нити. Это соответствует упомянутому выше оптическому свойству эллипса.

М.Николсон

Ф2612. *Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли оптическую схему, на которой изображены идеальная линза, предмет и его изображение. Из текста следует, что предмет представляет собой стержень длиной l с двумя точечными источниками на концах. Стержень и главная оптическая ось находятся в плоскости рисунка и стержень не пересекает плоскость линзы. От времени чернила высохли, и на рисунке остались видны лишь сами источники и их изображения, причем неизвестно, какая из четырех точек чему соответствует. Интересно, что эти точки расположены в вершинах и в центре равностороннего треугольника (рис.1).*

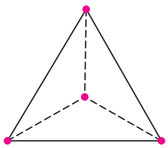


Рис. 1

1) Определите, самому предмету или его изображению принадлежит точка в центре треугольника.

2) Восстановите оптическую схему (предмет, изображение, линзу, ее главную оптическую ось и фокусы) с точностью до поворота на 120° и отражения.

3) Найдите фокусное расстояние линзы.

Примечание. *Линза называется идеальной, если любой пучок параллельных лучей фокусируется в ее фокальной плоскости.*

Предположим, что стержень с источниками – одна из сторон треугольника, например AB, а точки A_1 и B_1 – изображения источников (рис.2). Тогда лучи AA_1 и BB_1 пересекаются на середине стороны BB_1 в точке O, которая является центром линзы. Луч, идущий от точки A через B, преломляется в плоскости линзы и идет далее через изображения A_1 и B_1, значит, середина AB, т.е. точка K, принадлежит плоскости линзы. Но в этом случае плоскость линзы OK пересекает стержень AB, что невозможно по условию. Следовательно, центр треугольника – один из концов стержня. Рассмотрим этот вариант.

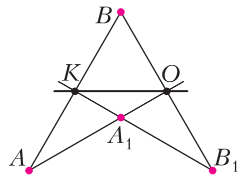


Рис. 2

Прямые AB и A_1B_1 пересекаются на середине A_1B_1 в точке K, принадлежащей плоскости линзы (рис.3). Тогда OK – плоскость линзы, точка O – ее центр, прямая PQ,

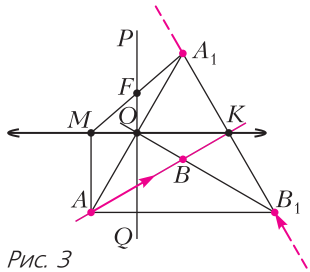


Рис. 3

проходящая через точку O перпендикулярно OK, – главная оптическая ось линзы. Точки A_1 и B_1 – концы изображения, а само изображение «разорвано» и представляет два луча, лежащие на прямой A_1B_1 и уходящие из точек A_1 и B_1 на бесконечность. Линза – собирающая, поскольку только такая линза может давать «разорванное» изображение.

Определить положение фокусов и найти фокусное расстояние несложно. Пустим луч AM из точки A параллельно оси линзы PQ до пересечения с плоскостью линзы в точке M (см. рис.3). После преломления луч пойдет через изображение A_1. Пересечение MA_1 с PQ – точка F – и есть главный фокус линзы. Так как OK – средняя линия треугольника, а точка O – середина AA_1, то $OF = \frac{1}{4}h$, где $h = \frac{3}{2}AB = \frac{3}{2}l$ – высота треугольника. Таким образом, фокусное расстояние линзы равно $OF = \frac{3}{8}l$.

А.Аполонский

Задачи

1. При каких целых значениях n правильный треугольник со стороной n можно замостить плитками, имеющими форму равнобочной трапеции со сторонами 1, 1, 1, 2?

2. а) Может ли случиться, что в компании из 10 девочек и 9 мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики – с одним и тем же числом девочек?
б) А если девочек 11, а мальчиков 10?

3. В каждой клетке квадрата 8×8 клеток проведена одна из диагоналей. Рассмотрим объединение этих 64 диагоналей. Оно состоит из нескольких связных частей (к одной части относятся точки, между которыми можно пройти по одной или нескольким диагоналям). Может ли количество этих частей быть больше 15?

4. Каких пятизначных чисел больше: не делящихся на 5 или тех, у которых ни первая, ни вторая цифра слева – не пятерка?

Иллюстрации Д.Гришуковой

Автор этих задач – Н.Б.Васильев

Обход многоугольника

Е.БАКАЕВ

В КОНКУРСЕ ИМЕНИ А.П.САВИНА в «Кванте» №12 за 2019 год предлагалось решить следующую задачу для некоторых конкретных значений n (автор задачи – А.Перепечко):

Барон Мюнхгаузен огородил свои владения забором в форме n-угольника. Он утверждает, что каждый внутренний угол этого n-угольника либо меньше $10°$, *либо больше* $350°$. *Может ли барон быть прав? Решите задачу для а)* $n = 10$; *б)* $n = 11$; *в)* $n = 101$.

Решим эту задачу для всех натуральных n. Будем называть углы многоугольника, меньшие $10°$, *маленькими*, а бóльшие $350°$ – *большими*. Итак, нас интересуют многоугольники, в которых a маленьких углов и b больших, $a + b = n$.

Четные *n*

Начнем с наименьших n. Понятно, что для $n = 3$ такого многоугольника не существует. Для $n = 4$ пример есть (рис.1,*а*). Еще порисовав многоугольники, можно додуматься, как устроена серия примеров для всех четных n (рис.1, *б*, *в*). Здесь и далее будем отмечать маленькие углы фиолетовым цветом, а углы, дополняющие большие углы до полного угла, – зеленым.

Упражнение 1. Докажите, что в шестиугольнике на рисунке 1,*б* выполняется равенство $\gamma = (\beta_1 + \beta_2) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$.

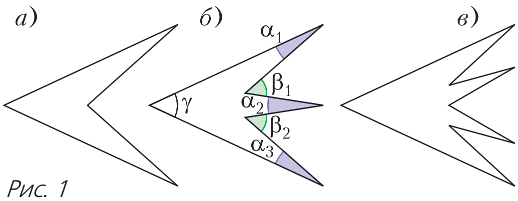


Рис. 1

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200802

Аналогично тому, как это получается в упражнении 1, в случае $(2k + 2)$-угольника такой угол будет равен

$$\gamma = (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k+1}). \quad (1)$$

Это легко доказать с помощью теоремы о сумме углов n-угольника (которая гласит, что сумма углов любого n-угольника равна $180° \cdot (n - 2)$). Либо же можно представить, что мы поворачиваем верхнюю сторону (точнее, луч – идущее вдоль стороны направление) на угол α_1 против часовой стрелки, потом на β_1 по часовой, потом на α_2 против часовой стрелки и т.д. (рис.2).

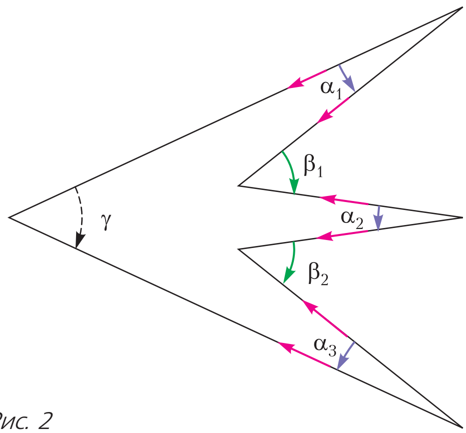


Рис. 2

В итоге верхняя сторона повернется на угол γ по часовой стрелке, отсюда и получаем равенство (1).

Упражнение 2. Придумайте примеры для $n = 6$ и $n = 8$ вида, отличного от показанного на рисунке 1.

Перестройка

Можно доказать существование примера, не предъявляя его явно: надо показать, как добавить к подходящему примеру две вершины так, чтобы снова получился подходящий. Тогда из подходящего примера для $n = 4$ получится бесконечная цепочка примеров для всех четных n.

Возможна такая «перестройка» многоугольника: возьмем один из его маленьких углов и вырежем из него параллелограмм, как изображено на рисунке 3. Один ма-

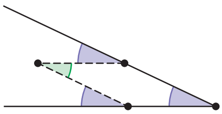


Рис. 3

ленький угол превратится в два равных ему маленьких и один большой.

Упражнение 3. Придумайте другую «перестройку», добавляющую к многоугольнику две вершины.

Итак, для многоугольников с четным количеством сторон есть серия примеров. Осталось понять, при каких нечетных n существуют подходящие n-угольники. Рассмотрим среди всех таких n наименьшее, обозначим его M. Тогда для всех нечетных n, бóльших M, подходящий пример можно будет получить, нужное число раз повторив «перестройку» (также надо будет убедиться в наличии хотя бы одного маленького угла в исходном примере, чтобы «перестройку» можно было осуществить). Осталось найти M.

В приведенном выше рассуждении скрылась неточность: такого наименьшего n может и не существовать – если подходящих примеров для нечетных n нет вовсе. Но сейчас мы такой пример приведем.

Первый пример

Вернемся к конструкции на рисунке 2. При $\gamma = 180°$ такой «четноугольник» превратится в «нечетноугольник» (рис.4). Для какого наименьшего n устроенный таким образом пример существует? Сумма углов $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k$ должна быть больше 180°, но все слагаемые в сумме меньше 10°, значит, их хотя бы 19. Тогда всего вершин не менее $19 + 20 = 39$.

Нетрудно понять, что нужные значения углов подобрать возможно. Итак, пример на $n = 39$ получен, а значит, $\boxed{M \le 39}$.

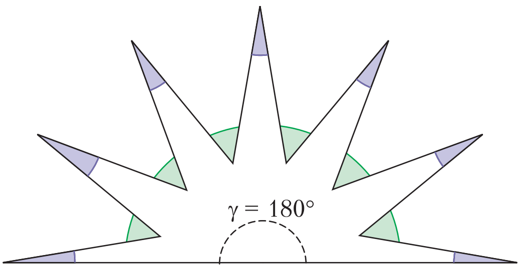


Рис. 4

Первая оценка

Некоторый пример получен, теперь давайте получим какую-нибудь оценку на количество сторон подходящего многоугольника. Снова будем рассматривать направления, но иначе. Начнем обход границы многоугольника против часовой стрелки и будем следить за тем, как меняется направление, в котором мы движемся.

Так как в подходящем многоугольнике каждый угол либо маленький, либо большой, то при переходе на очередную сторону направление, в котором мы движемся, меняется на *почти* противоположное. Затруднений с примером для четного n как раз и не возникает – при обходе направление меняется на *почти* противоположное четное количество раз и становится исходным. В случае же нечетного n нам потребуется оценить возможный вклад этих «почти».

Можно считать, что направлениям соответствуют лучи, выходящие из одной точки. На рисунках 5,*а* и 6,*а* показаны обходы многоугольников, а на рисунках 5,*б* и 6,*б* начала тех же лучей-направлений обхода перенесены в одну точку.

Будем следить за тем, на какой угол изменяется направление. Некоторые повороты происходят по часовой стрелке, некоторые – против часовой. Направление

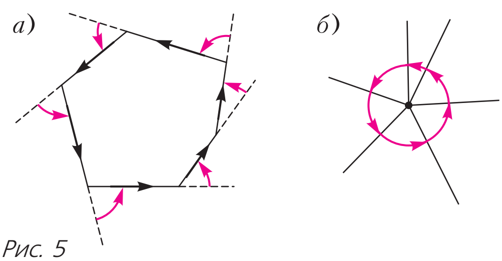


Рис. 5

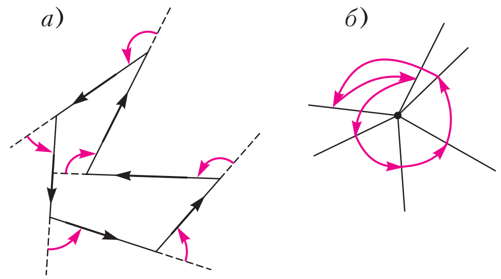


Рис. 6

против часовой стрелки будем считать положительным. Какое-то из направлений выбрано «нулевым», т.е. началом отсчета. Таким образом, направлению соответствует число (величина отклонения от начала отсчета) и при изменении направления число меняется.

При проходе через маленький угол α_i направление поворачивается на $(180° - \alpha_i)$ против часовой стрелки (рис.7,*а*), т.е. увеличивается на $(180° - \alpha_i)$. А при проходе

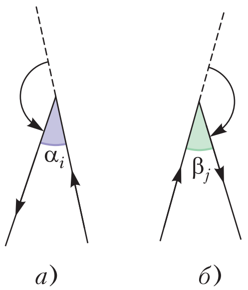


Рис. 7

через большой угол $(360° - \beta_j)$ оно поворачивается на $(180° - \beta_j)$ по часовой стрелке (рис.7,*б*), т.е. уменьшается на $(180° - \beta_j)$. Тогда суммарное изменение направлений будет равно

$$S = (180° - \alpha_1) + (180° - \alpha_2) + \ldots + (180° - \alpha_a) -$$

$$-(180° - \beta_1) - (180° - \beta_2) - \ldots - (180° - \beta_b) =$$

$$= 180° \cdot (a - b) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_a) +$$

$$+(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_b) = 180° \cdot (a - b) - A + B, \quad (2)$$

где через A обозначена сумма $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ $\ldots + \alpha_a)$, через B – сумма $(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_b)$.

Так как путь замыкается, то после n поворотов направление станет таким же, как было сначала, а значит, суммарное изменение направлений S должно быть кратно 360°. Кроме того, $a - b \neq 0$, поскольку $a + b$ нечетно. Тогда из равенства (2) получаем $|A - B| \geq 180°$, значит, в сумме A или в сумме B хотя бы 19 слагаемых и $n \geq 19$. Соответственно, и $\boxed{M \geq 19}$.

Существует ли пример на 19?

Пока что между оценкой и примером имеется «зазор» от 19 до 39.

Существует ли пример с 19 вершинами? Если существует, то что про него можно понять из полученной нами оценки? В одной из сумм A и B должно быть 19 слагаемых, в другой ни одного. Значит, все повороты должны быть в одну сторону (пусть против часовой стрелки) и углы между соседними сторонами должны быть в среднем по $\frac{180°}{19}$. Начнем рисовать такой многоугольник (рис.8).

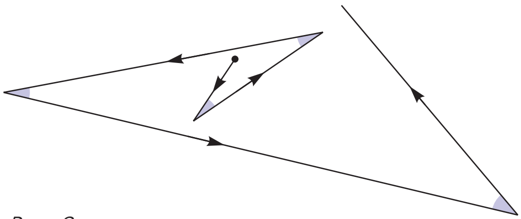


Рис. 8

Кажется, что мы движемся «по спирали» и вряд ли получится такой многоугольник замкнуть…

В оценке мы пока что не использовали то, что это многоугольник; мы опирались только на то, что это замкнутая ломаная. Напомним разницу: граница многоугольника – это, по определению, замкнутая ломаная без самопересечений. Разрешив самопересечения, можно ли нарисовать подходящую замкнутую 19-звенную ломаную? Да, пример такой замкнутой ломаной привести нетрудно. Рассмотрим правильный 19-угольник. Между двумя его самыми длинными диагоналями, выходящими из одной вершины, угол $\frac{180°}{19}$. Так

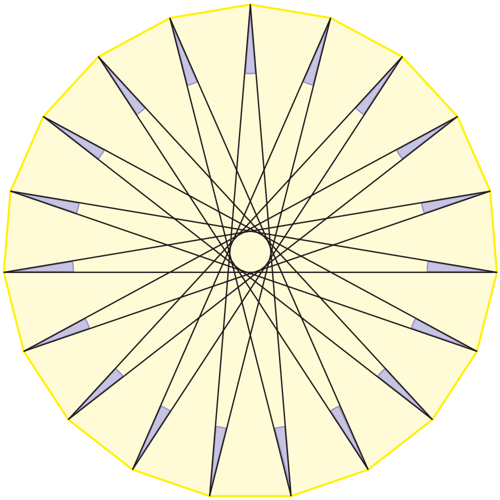


Рис. 9

что подходящую замкнутую 19-звенную ломаную можно нарисовать, обходя вершины правильного 19-угольника по этим диагоналям (рис.9).

Итак, при $n = 19$ пример для замкнутой ломаной нарисовать получилось, а для многоугольника – не вышло.

Вернемся к равенству (2). Угол $(180° - \alpha_i)$ дополняет угол α_i до 180°, это смежный с ним угол, внешний угол многоугольника. Действительно, направление обхода изменяется как раз на величину этого внешнего угла. Это верно и для углов, бóльших 180°: если $\varphi > 180°$, то угол величиной $(180° - \varphi)$ по-прежнему можно назвать смежным с ним. Правда, его величина будет отрицательной, но отрицательные величины углов нам уже несколько привычны. На рисунке 10 серым цветом отмечены смежные углы к углу φ для двух случаев: $\varphi < 180°$ и $\varphi > 180°$. Так что S – это сумма внешних углов многоугольника. А у многоугольников (как выпуклых, так и невыпуклых) она, как известно, *равна* 360°! В точности равна, а не только кратна 360°, как это выходит для обычных замкнутых ломаных.

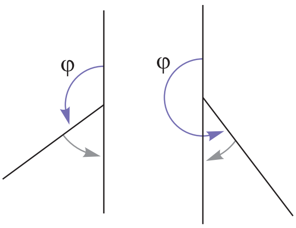


Рис. 10

Тем самым получается, что направление обхода совершит *ровно один* оборот против часовой стрелки. Для выпуклых многоугольников это вполне очевидно (см. рис.5). Как раз рассмотрением такой картинки и можно доказать теорему о сумме внешних углов выпуклого многоугольника (т.е. тот факт, что она равна 360°). Правда, для невыпуклых многоугольников это утверждение уже совсем не очевидно, и проще доказать формулу суммы углов (внешних или внутренних) невыпуклого многоугольника иначе. Здесь мы не будем приводить это доказательство. С ним читатель может познакомиться, например, в статьях Н.Васильева и В.Гутенмахера «Сумма углов» и «О разрезаниях многоугольника и теореме Эйлера» в «Кванте» №2 за 1988 год.

Упражнения

4. Найдите значение S для замкнутой ломаной на рисунке 9. Как зависит S от направления обхода ломаной?

5. Приведите пример замкнутой самопересекающейся ломаной, для которой а) $S = 360°$; б) $S = 0°$.

Улучшаем оценку

Мы разобрались, что $S = 360°$, а тогда из равенства (2) получаем $180° \cdot (a - b - 2) = A - B$. Так как $0 < A < 10° \cdot a$ и $0 < B < 10° \cdot b$, то

$$-10° \cdot b < 180° \cdot (a - b - 2) < 10° \cdot a.$$

Поскольку $n = a + b$ нечетно, то и $a - b$ нечетно. Разберем 4 случая, каким оно может быть:

- $a - b \geq 5$, тогда $180° \cdot 3 < 10° \cdot a$, т.е. $n \geq a \geq 55$;
- $a - b = 3$, тогда $180° < 10° \cdot a$, т.е. $a \geq 19$ и $b = a - 3 \geq 16$, значит, $n \geq 19 + 16 = 35$;
- $a - b = 1$, тогда $10° \cdot b > 180°$, т.е. $b \geq 19$ и $a = b + 1 \geq 20$, значит, $n \geq 19 + 20 = 39$;

• $a - b \le -1$, тогда $10° \cdot b > 180° \cdot 3$, т.е. $n \ge b \ge 55$.

Итак, во всех случаях количество вершин не меньше 35: $\boxed{M \ge 35}$.

Получаем пример

Из оценки следует, что вариант $n = 35$ возможен лишь при $a = 19$, $b = 16$. Это помогает придумать пример: 4 подряд маленьких угла (в порядке обхода границы многоугольника), затем большой угол, затем снова маленький и так далее – маленькие углы чередуются с большими (рис.11).

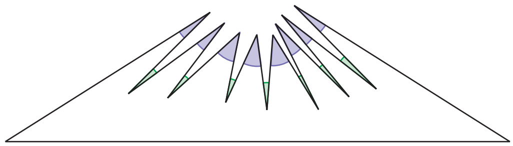


Рис. 11

Осталось показать, что устроенный таким образом пример действительно существует и нам не помешают какие-нибудь противоречия, на которые мы еще не обратили внимания.

Построение примера можно описать так. Возьмем треугольник, два угла которого меньше 10°, а третий – меньше 170° (например: 9°, 9°, 162°). Больший его угол разрежем еще на 17 маленьких углов (на рисунке 12 их 8). Получится замкнутая ломаная, у которой часть звеньев друг на друга накладываются. В нем 19 маленьких углов и 16 углов в 360° (на рисунке они отмечены красным). Осталось последовательно подвигать вершины, чтобы стороны перестали накладываться друг на друга, но при этом маленькие углы остались маленькими. Таким образом будет получен искомый многоугольник.

Итак, $\boxed{M = 35}$. Задача решена.

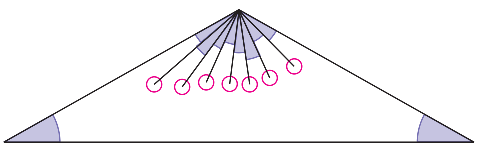


Рис. 12

Напоследок приведем еще две интересные задачи на затронутые темы.

Дополнительные задачи

1 (В.Произволов, «Задачи на вырост»). Каждый из углов 19-угольника кратен 10°. Докажите, что у него найдутся две параллельные стороны.

2. Какое наибольшее количество острых углов может быть а) в выпуклом, б) в произвольном n-угольнике?

...из всех лучей, падающих из данной точки и отражающихся в данную точку, минимальны те, которые от плоских и сферических зеркал отражаются под равными углами.

Герон Александрийский

По обе стороны от места наибольшего значения убывание вначале нечувствительно.

Иоганн Кеплер

Из всех путей от точки A к точке B свет выбирает тот путь, на который требуется наименьшее время.

Пьер Ферма

В мире не происходит ничего, в чем бы не был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.

Леонард Эйлер

А так ли хорошо знакомы вам экстремумы в физике?

Как, располагая определенной суммой, выбрать в магазине максимальное количество необходимого товара; как затратить минимальное время на подготовку к экзамену, рассчитывая на высокую оценку? А вот задания посерьезнее: уменьшить до предела вес прибора, посылаемого на Марс; выпустить как можно больше продукции, используя ограниченное оборудование; добиться наименьших транспортных расходов при доставке грузов; запустить ракету на максимальную высоту при заданном запасе топлива…

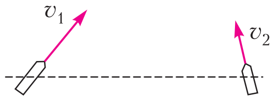
Это не что иное, как задачи поиска наибольших и наименьших значений, максимумов и минимумов, обобщенно экстремумов, или задачи оптимизации. Последние столетия физики и математики – порой вразнобой, чаще «нога в ногу» – бились над методами их решения и достигли, без преувеличения, превосходных результатов, продвинув их и в экономику, и в химию, и в медицину…

Вопросы и задачи

1. Вдоль железной дороги стоят километровые столбы на расстоянии 1 км друг от друга. Один из них покрасили в желтый цвет и шесть – в красный. Сумма расстояний от желтого столба до всех красных равна 14 км. Чему может быть равно максимальное расстояние между красными столбами?

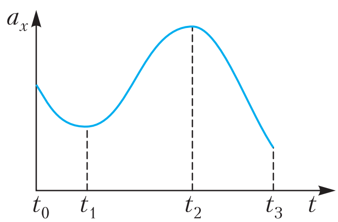
2. По одну сторону от прямой дороги расположены поселки A и B. Где на дороге нужно поставить автобусную остановку, чтобы суммарный путь до нее от поселков был наименьшим?

3. Начальные положения и скорости двух равномерно движущихся кораблей показаны на рисунке. Как найти минимальное расстояние между ними?



4. Определите минимальную скорость, с которой пловец может переплыть реку шириной $d = 40$ м при условии, что его не должно снести на расстояние больше $s = 30$ м. Скорость течения реки 2 м/с.

5. На графике представлена зависимость проекции ускорения прямолинейно движущегося тела от времени. В какие моменты скорость тела наименьшая; наибольшая?



6. Из точки A тело движется по прямой с начальной скоростью, равной нулю, и останавливается в точке B. При этом оно может двигаться с постоянным по модулю ускорением и равномерно. Каков должен быть характер движения, чтобы его время было минимальным?

7. Имеется множество гладких наклонных плоскостей с одинаковыми основаниями s, но разными высотами. При какой высоте h время соскальзывания тела по наклонной плоскости будет минимальным?

8. Какова скорость лопатки паровой турбины, при которой максимальная часть кинетической энергии бьющей в нее струи пара переходит в энергию вращения турбины?

9. На диаграмме p, T процесс, проводимый с идеальным газом, изображается в виде окружности. Объем газа постоянен. Как определить графически, где масса газа максимальна и где минимальна?

10. Давление идеального газа, расширяющегося по линейной зависимости, падает в два раза при удвоении объема. Начальная температура газа T_0. Чему равна максимальная температура в этом процессе?

11. Найдите минимальное расстояние между предметом и его действительным изображением в тонкой линзе, фокусное расстояние которой F известно.

Микроопыт

Склейте противоположными сторонами прямоугольный лист кальки или бумаги для запекания. Полученную поверхность – произвольной формы в поперечном сечении – поставьте вертикально на дно плоской тарелки и медленно наливайте в нее воду, придерживая так, чтобы вода не могла внизу просочиться. Какую форму примет поверхность?

Любопытно, что…

…об экстремальных свойствах круга и шара в Древней Греции знали с 4 века до новой эры. Однако задачи подобного рода исследовались тогда только геометрическими методами, и каждая из них для своего решения требовала специфического приема.

…общие подходы к изучению «спровоцированных» практикой экстремальных задач начали проявляться лишь в XVII веке, что привело к созданию дифференциального и интегрального исчисления – мощнейшего исследовательского инструмента естествознания.

…Винченцо Вивиани, итальянский ученый, ученик Галилея, построивший по идее своего учителя маятниковые часы, а по поручению Торричелли выполнивший знаменитый опыт по доказательству существования атмосферного давления, был известен и своей книгой «О максимальных и минимальных значениях».

…прозвучавшую еще у Герона мысль о том, что природа управляется экстремальными принципами, развил Ферма. От идеи кратчайшего пути, выбираемого светом, он пришел к утверждению о минимуме времени, затрачиваемого на прохождение неоднородной среды, что позволило ему вывести закон преломления света.

…подтверждением того, что природа пользуется экстремальными решениями, служит форма ячеек пчелиных сот, на строительство которых при заданном объеме идет наименьшее количество воска, или форма мыльной пленки, ограниченной двумя проволочными кольцами и имеющей наименьшую площадь поверхности.

…изучая движение центров тяжести тел, Торричелли опирался на принцип, носящий сейчас его имя и гласящий, что механическая система в состоянии с наименьшей потенциальной энергией находится в равновесии.

…из всех шариков, скатывающихся по разным гладким желобкам из одной определенной точки в другую, быстрее всех у цели окажется шарик, скользящий по циклоиде (или брахистохроне). С решения этой и аналогичных задач, возникающих в геометрии, механике, физике, началось создание вариационного исчисления.

…дальнейшее развитие теории экстремальных задач в XX веке было вызвано потребностями космонавтики, энергетики, транспорта, что привело к бурному росту таких научных направлений, как линейное программирование, оптимальное управление и теория катастроф.

Что читать в «Кванте» об экстремумах в физике

(публикации последних лет)

1. «Задачи с экстремумами» – 2015, №1, с.46;

2. «Принцип Ферма и необычное поведение света» – 2017, №2, с.27;

3. «Движение тел в гравитационном поле» – 2018, №9, с.29;

4. «Исследуем сферу ЭКСПО-2017» – 2019, №3, с.34;

5. «Относительность движения в задачах динамики» – 2019, №4, с.40;

6. «Муравей на консервной банке» – 2020, №2, с.31.

Материал подготовил А. Леонович

Трансцендентные уравнения в задачах по физике

Б.МУКУШЕВ

При разборе задач по физике иногда приходится иметь дело с трансцендентными уравнениями, которые обычно не решаются аналитическим способом. Вот примеры трансцендентных уравнений:

$$2^x - 10x = 0, \quad \ln x - x^2 = 2x,$$

$$0{,}7\cos x - \sin 1{,}3x = 0.$$

Для решения таких видов уравнения используются методы приближенного вычисления: *графический, численный, компьютерный*.

Рассмотрим несколько задач из механики, при решении которых получаются трансцендентные уравнения и обсудим оптимальные методы решения подобных задач.

Задача 1. *Под каким углом φ к горизонту нужно бросить тело, чтобы за время его полета до возвращения на исходную высоту среднее значение модуля вектора тангенциального ускорения совпало с модулем среднего значения вектора нормального ускорения? Сопротивлением воздуха пренебречь.*

Решение. Модуль вектора тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$ определяет изменение модуля скорости тела. Из соображений симметрии параболического движения тела рассмотрим только его подъем до наивысшей точки траектории. Для нахождения среднего значения модуля вектора тангенциального ускорения поделим общее изменение модуля скорости в процессе движения тела до максимальной высоты, равное $v - v_0\cos\varphi$, где v_0 – начальная скорость, на время подъема $T = \dfrac{v_0\sin\varphi}{g}$. Таким образом, среднее значение модуля вектора тангенциального ускорения равно

$$\langle|\vec{a}_\tau|\rangle = \frac{v_0 - v_0\cos\varphi}{(v_0\sin\varphi)/g} = g\,\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200803

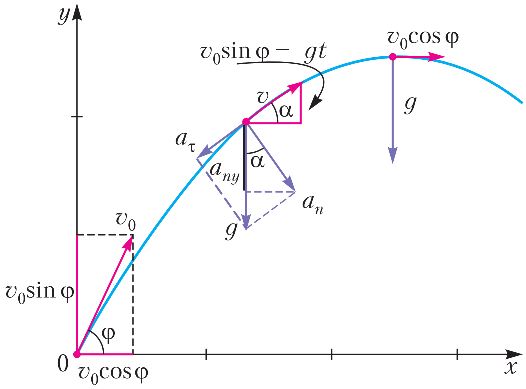


Рис. 1

Алгоритм расчета модуля среднего значения вектора нормального ускорения $\vec{a}_n$ выглядит по другому: сначала выполняется усреднение, а потом вычисляется модуль. В силу симметрии движения тела относительно вертикальной прямой, проходящей через наивысшую точку траектории, среднее значение вектора нормального ускорения будет направлено вертикально вниз. Поэтому можно усреднять его вертикальную проекцию a_{ny} только за время подъема, так как за время спуска среднее значение проекции будет таким же:

$$a_{ny} = a_n\cos\alpha = g\cos^2\alpha,$$

где α – угол наклона скорости к горизонту в момент времени t от начала полета (рис.1). Итак, модуль среднего значения вектора нормального ускорения равен

$$|\langle\vec{a}_n\rangle| = |\langle a_{ny}\rangle| = \frac{1}{T}\int_0^T g\cos^2\alpha\cdot dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{gdt}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}.$$

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v_0\sin\varphi - gt}{v_0\cos\varphi}$, то

$$|\langle\vec{a}_n\rangle| = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{gdt}{\left(\dfrac{v_0\sin\varphi - gt}{v_0\cos\varphi}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{v_0\cos\varphi}{T}\left(\frac{gt - v_0\sin\varphi}{v_0\cos\varphi}\right)\Bigg|_0^T = \frac{g\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

По условию задачи $\langle|\vec{a}_\tau|\rangle = |\langle\vec{a}_n\rangle|$, или

$$g\,\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{g\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

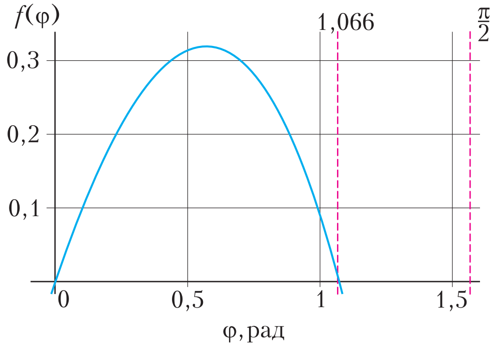


Рис. 2

Отсюда получаем трансцендентное уравнение

$$\varphi\cos\varphi + \cos\varphi - 1 = 0.$$

Одним из распространенных методов приближенного вычисления является *графический метод*, при его использовании получается оценочные результаты. Исследуем график функции

$$f(\varphi) = \varphi\cos\varphi + \cos\varphi - 1.$$

Если воспользуемся возможностями ППП MathCAD для построения графика этой функции, то можно улучшить точность результата решения трансцендентного уравнения. Из графика функции $f(\varphi)$ (рис.2), построенного посредством ППП MathCAD, можно видеть, что функция обратится в ноль приблизительно в точке

$$\varphi \approx 1{,}066 \text{ рад} \approx 61{,}12°.$$

Задача 2. *Нить, обернутая вокруг неподвижного диска радиусом r, образует полуокружность (рис.3). Один конец нити закреплен в точке A, ко второму концу нити привязан грузик, который вначале удерживается в точке B (точки A и B находятся на одной вертикали). В некоторый момент грузик отпускается. Какая часть нити останется в соприкосновении с диском, когда грузик максимально удалится от начального положения? Трением пренебречь.*

Решение. По закону сохранения энергии точка B и точка максимального удаления C находятся на одной горизонтали (рис.4). Из рисунка находим

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{CD}{r}.$$

С другой стороны, длина дуги BD равна длине отрезка CD:

$$\overset{\cup}{BD} = CD = r\theta.$$

Итак,

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \theta.$$

Это – трансцендентное уравнение, для его решения используем один из методов *численного анализа*. Чтобы определить число его решений на интересующем нас промежутке $0 < \theta < \pi$, построим графики (рис.5)

$$y = \theta \text{ и } y = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Из графиков видно, что в интервале $0 < \theta < \pi$ уравнение имеет единственный корень вблизи точки $\theta = 2$.

Чтобы улучшить точность полученной оценки, воспользуемся методом последовательных приближений, который относится к численным методам. Для этого сначала запишем наше уравнение в виде функции

$$\theta_n = f(\theta_{n-1}) = \operatorname{tg}\frac{\theta_{n-1}}{2}.$$

Находим значения функции в нулевом приближении $\theta_0 = 2$:

$$\theta_1 = f(\theta_0) \approx 1{,}557,\ \theta_2 = f(\theta_1) \approx 0{,}986,$$
$$\theta_3 = f(\theta_2) \approx 0{,}537,\ \theta_4 = f(\theta_3) \approx 0{,}275.$$

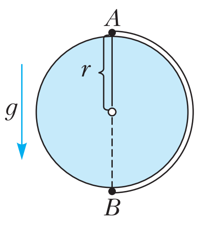


Рис. 3

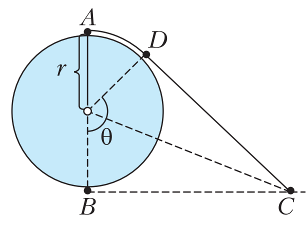


Рис. 4

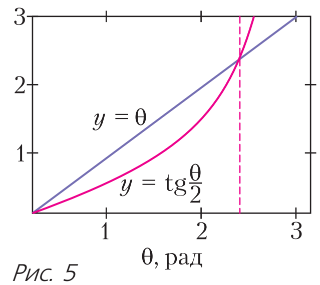


Рис. 5

Ясно, что последовательность все больше удаляется от предполагаемого значения корня. Значит, функция была выбрана неудачно, поэтому перепишем ее по другому:

$$\theta_n = F(\theta_{n-1}) = 2\mathrm{arctg}(\theta_{n-1}).$$

Для значения аргумента $\theta_0 = 2$ найдем

$$\theta_1 = F(\theta_0) \approx 2{,}214,\ \theta_2 = F(\theta_1) \approx 2{,}293,$$
$$\theta_3 = F(\theta_2) \approx 2{,}319,\ \theta_4 = F(\theta_3) \approx 2{,}327,$$
$$\theta_5 = F(\theta_4) \approx 2{,}330,\ \theta_6 = F(\theta_5) \approx 2{,}331,$$
$$\theta_7 = F(\theta_6) \approx 2{,}331.$$

Поскольку равенство $\theta_6 = \theta_7$ выполнено с достаточной точностью, можно написать, что

$$\theta \approx 2{,}331 \text{ рад} \approx 133{,}6°.$$

Таким образом,

$$\frac{\overset{\smile}{AD}}{\overset{\smile}{AB}} = \frac{\pi - \theta}{\pi} = 0{,}258.$$

Задача 3. *На закрепленный шар радиусом $R = 20$ см сверху поставлена игрушка «Ванька-встанька». Нижняя поверхность игрушки – сферическая с центром O и радиусом $r = 5$ см, C – центр тяжести игрушки, $OC = 2$ см. До какого предельного угла β_{max} можно отклонить игрушку, чтобы она возвратилась в начальное положение?*

Решение. При отклонении игрушки, например, вправо, центр тяжести смещается (рис.6). Если при этом он окажется левее вертикали AB, проходящей через точку опоры A, то момент силы тяжести будет возвращать игрушку в положение равновесия. Если же центр тяжести окажется правее AB, игрушка упадет.

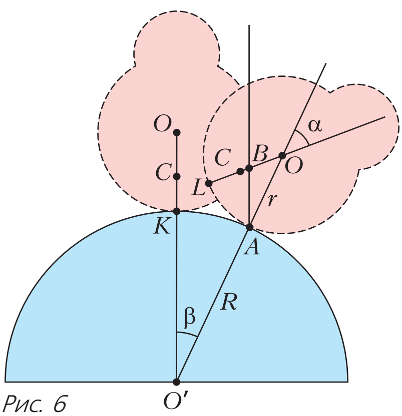


Рис. 6

Обозначим α – угол поворота игрушки, β – угол поворота радиуса $O'A$. Дуги LA и KA равны (нет проскальзывания), т.е. $\alpha r = \beta R$, откуда

$$\alpha = \beta \frac{R}{r}.$$

Из треугольника OAB имеем

$$\frac{OB}{\sin\beta} = \frac{AO}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} = \frac{r}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{r}{\sin(\beta(1 + R/r))},$$

или

$$OB = \frac{r\sin\beta}{\sin(\beta(1 + R/r))}.$$

Игрушка возвратится в исходное положение, если $OC > OB$, т.е.

$$OC > \frac{r\sin\beta}{\sin(\beta(1 + R/r))}.$$

С учетом соотношений $R/r = 4$ и $\frac{r}{OC} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ получим

$$\sin 5\beta > 2{,}5\sin\beta.$$

Чтобы найти предельный угол β_{max}, нам предстоит решить тригонометрическое уравнение

$$\sin 5\beta_{max} = 2{,}5\sin\beta_{max}.$$

Это уравнение не имеет аналитического решения, т.е. его можно отнести к классу трансцендентных уравнений. Здесь мы воспользуемся *компьютерным методом* решения уравнения, в котором могут использоваться программы на языках Microsoft Excel, Matlab, Mathematica, Mathcad, Pascal, C^{++} и др. Ниже предлагается решение уравнения $\sin 5\beta - 2{,}5\sin\beta = 0$ на языке программирования Pascal. При этом был использован один из методов численного анализа – метод Ньютона. Запишем программу:

```
Program Nuton;
uses crt; var x,x1,eps,pf:extended;
  i:integer; function f(x:real):real;
begin
  f:=sin(5*x)-2.5*sin(x);
    end;
      function df(x:real):real;
begin
  df:=5*cos(5*x)-2.5*cos(x);
    end
begin
  clrscr; write('приближенное значение коря = ');
  readln(x1),
    write('необходимая точность = ');
      readln(eps); x:=x1;
          pf:=f(x)/df(x);
            i:=0;
               while abs(pf)>eps do
begin
  x:=x-pf; pf:=f(x)/df(x); inc(i);
      {writeln(x:1:4,pf:10:4);}
         end;
writeln('точное значение корня = ',x:1:4);
writeln('количество итерации  = ',i);
    readln;
        end.
```

Результаты вычисления: приближенное значение корня – 1, необходимая точность – 0,0001, значение корня с заданной точностью – 0,3851 радиан, количество итераций – 6.

Итак,

$$\beta_{max} \approx 0,3851 \text{ рад} \approx 22,1°.$$

Значит, при $-22,1° < \beta < 22,1°$ «Ванька-встанька» возвращается в начальное положение.

Задача 4. *На неподвижном круглом полуцилиндре радиусом R находится в равновесии однородная доска. Полуцилиндр расположен на горизонтальной плоскости (на столе). Толщина доски h, длина l, при этом $\frac{l}{h} = 3$, $\frac{R}{h} = 0,6$. Возвратится ли доска в начальное состояние при максимальном отклонении от горизонтального положения, когда доска коснется поверхности стола (рис.7)? Трение между цилиндром и доской велико.*

Решение. Сначала нужно найти предельный угол отклонения доски $\varphi_{пр}$ от горизонтального положения, при меньших его значениях доска возвращается в начальное состояние. Для нахождения $\varphi_{пр}$ рассмотрим новую механическую систему, состоящую только из цилиндра и доски, когда отсутствует горизонтальная плоскость (рис.8). На первый взгляд может показаться, что равновесие доски вообще неустойчиво, так как центр масс доски лежит выше оси, вокруг которой она может поварачиваться. Однако здесь положение оси вращения не остается неизменным, поэтому этот случай требует специального исследования.

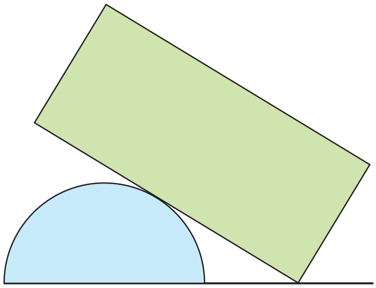


Рис. 7

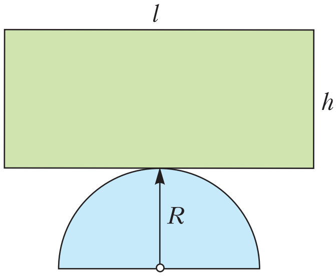


Рис. 8

Поскольку доска уравновешена в горизонтальном положении, центр полукруга O_1 и центр тяжести доски O_2 лежат на одной вертикали. Отклоним доску на некоторый угол φ от горизонтали (рис.9). Точка опоры

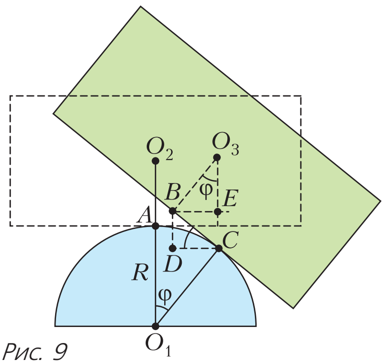


Рис. 9

из положения A перемещается в новое положение C, а та точка, которой доска до отклонения опиралась о полукруг, переходит в новое положение B. Поскольку проскальзывание отсутствует, длина дуги AC равна длине отрезка BC:

$$\overset{\cup}{AC} = BC = R\varphi.$$

Центр тяжести доски O_2 переходит в положение O_3. Если вертикаль, проведенная через O_3, проходит левее новой точки опоры C, то сила тяжести стремится вернуть доску в положение равновесия. Выразим это условие на языке математики. Проводим вертикаль через точку B и видим, что должно быть выполнено условие $BE \le DC$. Так как $BE = \frac{h}{2}\sin\varphi$, а $DC = BC\cos\varphi = R\varphi\cos\varphi$, получаем

$$\frac{h}{2}\sin\varphi \le R\varphi\cos\varphi, \text{ или } \operatorname{tg}\varphi \le \frac{2R}{h}\varphi.$$

Подставив $\frac{R}{h} = 0{,}6$, получим $\operatorname{tg}\varphi \le 1{,}2\varphi$.

Итак, нам следует решать уравнение

$$\operatorname{tg}\varphi - 1{,}2\varphi = 0.$$

Данное уравнение трансцендентное. Посредством прикладной программы Mathcad построим график функции $y = \operatorname{tg}\varphi - 1{,}2\varphi$ на декартовых координатных осях (рис.10). Из графика видно, что корень, находящийся в интервале $0{,}5 < \varphi < 1$, имеет физический смысл. На рисунке 11 представлена программа MathCAD для реализации численного решения данного уравнения с начальным значением $\varphi = 0{,}5$. Уравнение решено посредством встроенной функции Find (найти): предельный угол отклонения доски равен

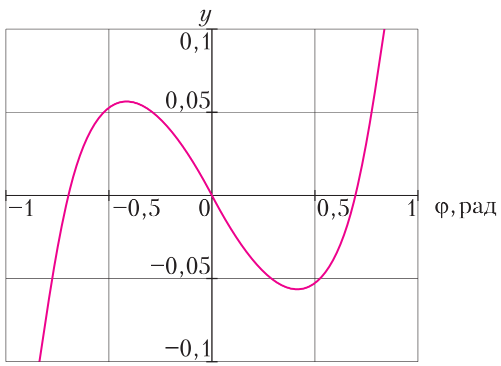


Рис. 10

```
φ := 0.5 "Начальное значение исходной
          переменной
Given                 "Ключевое слово
tan(φ) − 1.2φ = 0     "Решаемое уравнение
Find(φ) = 0.695       "Решение уравнения
```

Рис. 11

$$\varphi_{\text{пр}} \approx 0{,}696 \text{ рад} \approx 39{,}8°.$$

Переходим к условию нашей задачи. Из рисунка 12 находим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{O'A}{AL} = \frac{O'A}{BL - BA},$$

где $BL = 2{,}5R$, $BA = \overset{\cup}{KA} = R\varphi$. Поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R}{2{,}5R - R\varphi} = \frac{1}{2{,}5 - \varphi}, \text{ или}$$

$$\operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{2{,}5 - \varphi} = 0.$$

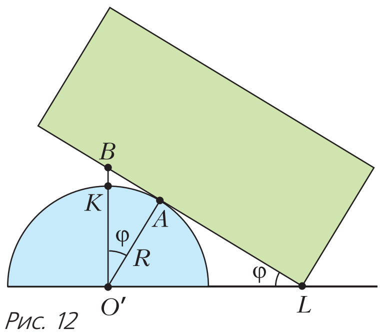


Рис. 12

Опять получили трансцендентное уравнение. Для его решения, т.е. для оценки приближенного значения максимального угла отклонения доски, построим графики функций

$$y = \operatorname{tg}\varphi, \; y = \frac{1}{2{,}5 - \varphi}.$$

Из графиков (рис.13) видно, что решение нашего уравнения лежит в интервале $\varphi \in (0{,}4; 0{,}6)$. Используем программу в среде Mathcad для реализации численного решения данного уравнения с начальным значением $\varphi = 0{,}4$ (см. рис.11). Уравнение решено посредством встроенной функции Find (найти): максимальный угол отклонения

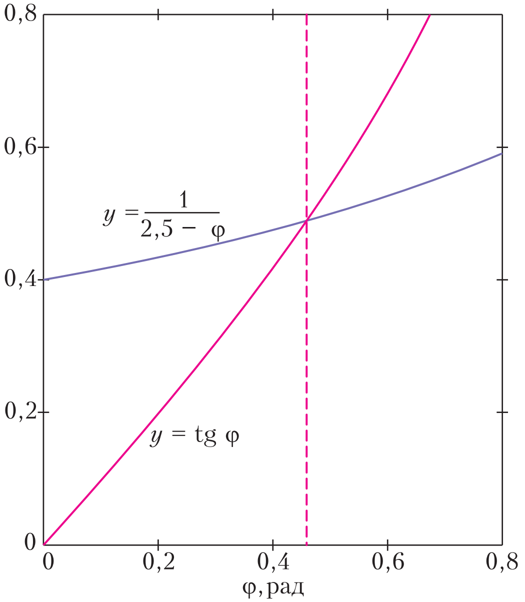


Рис. 13

доски равен

$$\varphi_{\max} \approx 0,453 \text{ рад} \approx 26°.$$

Значит,

$$\varphi_{\max} \approx 26° < \varphi_{\text{пр}} \approx 39,8°,$$

поэтому доска возвратится в начальное положение.

Задача 5. *На покоящийся, на гладкой поверхности кубик массой m, соединенный со стенкой пружиной, налетает справа второй кубик массой M (рис.14). Происходит абсолютно упругий удар, после чего первый кубик начинает колебаться. Какая часть периода колебаний пройдет до момента второго столкновения кубиков, если: а) $m/M = 1/2$, б) $m/M \ll 1$? При каких значениях параметра $\gamma = m/M$ второе столкновение не произойдет вовсе?*

Решение. Пусть v_0 – начальная скорость второго кубика, v_1 и v_2 – скорости кубиков после первого соударения, причем оба кубика двигаются влево. Из законов сохранения

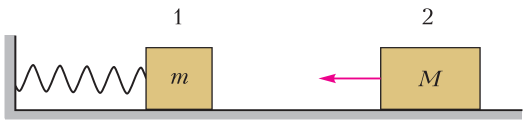


Рис. 14

импульса и энергии получаем

$$Mv_0 = mv_1 + Mv_2, \quad \frac{Mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2},$$

откуда

$$v_1 = v_0\frac{2}{1+\gamma}, \quad v_2 = v_0\frac{1-\gamma}{1+\gamma}.$$

После соударения второй кубик будет двигаться равномерно, и его координата со временем будет изменяться по закону

$$x_2 = v_2 t = v_0\frac{1-\gamma}{1+\gamma}t.$$

Первый же кубик начнет колебаться по закону

$$x_1 = x_m \sin \omega t$$

с частотой гармонических колебаний $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, где k – жесткость пружины. Амплитуду колебаний x_m найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2}, \text{ и } x_m = \frac{v_1}{\omega} = \frac{2v_0}{(1+\gamma)\omega}.$$

Таким образом,

$$x_1 = \frac{2v_0}{(1+\gamma)\omega}\sin \omega t.$$

Второе соударение кубиков произойдет при условии $x_1 = x_2$, т.е.

$$\frac{2v_0}{(1+\gamma)\omega}\sin \omega t = v_0\frac{1-\gamma}{1+\gamma}t.$$

Отсюда

$$2\sin \omega t = (1-\gamma)\omega t,$$

или

$$2\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) = (1-\gamma)\cdot 2\pi\frac{t}{T},$$

где – T период колебаний, t/T – искомая часть периода.

Обозначим $\pi t/T = z$. Тогда предыдущее уравнение приобретет вид

$$\sin 2z = (1-\gamma)z.$$

При $\gamma = 1/2$ получаем

$$\sin 2z = \frac{z}{2}.$$

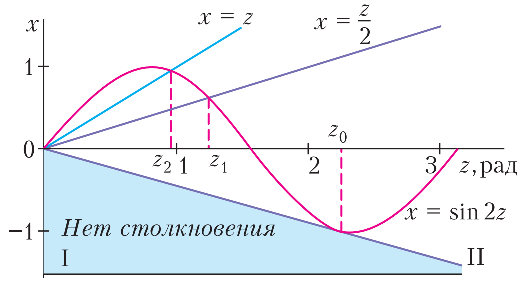


Рис. 15

Начертим графики функций $x = \sin 2z$ и $x = z/2$ (рис.15). Из их пересечения видно, что результаты решения находятся в интервале $1 < z < 2$. Здесь используем один из методов приближенного вычисления – *метод половинного деления*. Составим программу в среде ППП MathCAD для рационального применения данного метода:

```
bisec(f, a, b, ε) := | fa ← f(a)
                     | while b − a > ε
                     |   | z ← (a + b)/2
                     |   | fz ← f(z)
                     |   | (break) if fz = 0
                     |   | b ← z if fa · fz < 0
                     |   | a ← z otherwise
                     | z

f(z) := sin(2z) − z/2      "Уравнение как функция пользователя
a := 1                     "Левая граница интервала
b := 1.5                   "Правая граница интервала
ε := 0.001                 "Погрешность уточнения корня
bisec(f, a, b, ε) = 1.237  "Уточненное значение корня уравнения
```

Таким образом,

$$z_1 \approx 1{,}237 \text{ рад}, \ \pi\frac{t}{T} \approx 1{,}237, \ \frac{t}{T} \approx 0{,}39.$$

Если $m \ll M$, т.е. $\gamma \to 0$, то получаем уравнение

$$\sin 2z = z.$$

ППП Mathcad даст такое решение:

$$z_2 \approx 0{,}948 \text{ рад}, \text{ или } \frac{t}{T} \approx 0{,}30.$$

Второго соударения кубиков не произойдет, если их координаты больше не совпадут, т.е., говоря на языке графиков, если прямая, выражающая график зависимости координаты второго кубика от времени, не пересечет второй раз синусоиду. Этому соответствуют все прямые линии, выходящие из точки 0 и находящиеся в закрашенной области между линиями I и II (см. рис.15). Линия I соответствует случаю $m/M \to \infty$ (масса налетающего кубика очень мала). Осталось найти γ для линии II – касательной к синусоиде.

Напишем общее уравнение касательной в виде

$$f(z) = f'(z_0)(z - z_0) + f(z_0),$$

где z_0 – абсцисса точки касания этой прямой к синусоиде. Известно, что $f(z) = \sin 2z$ и $f'(z) = 2\cos 2z$. Для точки 0 уравнение касательной записывается так:

$$0 = f'(z_0)(0 - z_0) + f(z_0), \text{ или}$$

$$0 = -2z_0 \cos 2z_0 + \sin 2z_0.$$

Отсюда находим

$$\operatorname{tg} 2z_0 = 2z_0.$$

Получено трансцендентное уравнение, его будем решать с помощью *метода хорд*, относящегося к методам приближенного вычисления. Программа, составленная в среде Паскаль или MathCAD, даст следующий результат: абсцисса точки касания касательной к синусоиде равна $z_0 \approx 2{,}247$. Известно, что $\sin 2z = (1 - \gamma)z$, откуда

$$\gamma = 1 - \frac{\sin 2z_0}{z_0} \approx 1{,}434.$$

Итак, чтобы не произошло второго столкновения, должно выполняться условие

$$1{,}434 < \gamma < \infty.$$

Волшебники Джона Конвея

К.КНОП

Замечательный математик Джон Хортон Конвей знаменит не только разработанной им комбинаторной теорией игр, но и огромным вкладом в занимательную математику. Одну из самых интригующих задач Конвея я впервые услышал в пересказе Т.Ховановой [1], именно этот рассказ и послужил основой для данной статьи. Вот эта задача:

Вчера вечером я ехал в одном автобусе с двумя волшебниками и подслушал их беседу:

A: У меня есть несколько детей, возраст каждого из них – целое положительное число, причем их сумма равна номеру этого автобуса, а произведение – моему собственному возрасту.

B: Как интересно! Возможно, если ты скажешь мне свой возраст и число твоих детей, я смогу вычислить их возраста?

A: Нет, не сможешь.

B: Ага! Наконец-то я узнал твой возраст.

Каким был номер автобуса, в котором мы ехали?

Начну с замечаний. Автор головоломки – Джон Конвей – тщательно продумывал весь ее антураж. В частности, местом действия выбран автобус (*bus*), потому что вместе с возрастом первого волшебника (*age*) и количеством его детей (*children*) у Конвея получились удобные обозначения для трех числовых величин – a, b, c. Пожалуй, я тоже сохраню именно эти обозначения. Итак, пусть a – возраст первого волшебника, b – номер автобуса (неизвестный нам, но известный второму волшебнику), а c – количество детей первого волшебника.

Второе замечание касается фразы волшебника A «Нет, не сможешь». В этом утверждении волшебник вовсе не сомневается в интеллектуальных способностях своего друга. Оно означает, что даже по полностью известной тройке чисел (a,b,c) невозможно однозначно определить возраста детей. Иначе говоря, имеются несколько разных наборов возрастов детей, которые дают одни и те же значения (a,b,c). Давайте будем называть такие наборы возрастов *конвеевскими*, или *К-наборами*.

Безумно красивой эту головоломку делает то, что к ней очень непросто подступиться. Если бы нам был известен возраст волшебника (число a), то можно было бы перебрать его делители и найти все варианты их сумм. Если бы был известен номер автобуса (b) – можно было бы разложить его различными способами в сумму слагаемых и получить варианты для их произведений. И даже если бы нам было известно всего лишь число детей (c), все равно объем перебора был бы уже существенно меньшим. Некоторые мои знакомые тратили на программирование перебора вариантов несколько часов и только тогда соображали, как подступаться к правильному решению.

Не правда ли, задача кажется совершенно недоопределенной, т.е. допускающей разные решения?

Вот одно из типичных рассуждений. Допустим, они едут в автобусе номер 21 ($b=21$), волшебнику 96 лет ($a=96$) и у него трое детей ($c=3$). Это значит, что их возраста – три натуральных числа с суммой 21 и произведением 96. Таких троек чисел есть две: $(1, 8, 12)$ и $(2, 3, 16)$, т.е. действительно если даже второй волшебник узнает все это, он не сможет определить возраста детей. Разве этот ответ не годится? Почему? Разве мы не нашли числа, удовлетворяющие всем условиям из диалога волшебников?

Нет, не нашли. Ответ «96 лет, автобус номер 21, 3 ребенка» не годится потому, что не учитывает самую последнюю реплику – о том, что волшебник B смог выяснить возраст волшебника A. Смог бы он это сделать, зная только номер автобуса? Иными словами, нет ли других К-наборов чисел с тем же b, но другим a? Чтобы ответить на этот вопрос, поставим его иначе. Нет ли других *К-троек* чисел с меньшим b и другим a? Ведь если они отыщутся, то можно просто добавить к ним несколько годовалых детей так, чтобы общая сумма чисел (число b) в получившемся К-наборе оказалась равной 21. При этом произведение (число a, т.е. возраст волшебника) не поменяется и останется отличным от старого. И действительно, такие К-тройки легко найти: например, это $(1, 5, 8)$ и $(2, 2, 10)$. Добав-

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200804

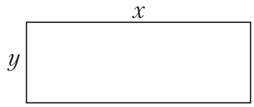
ляя к ним годовалых детей, можно получить К-набор с любым $b > 14$ (а возраст волшебника при этом – 40 лет). А из К-наборов $(1, 6, 6)$ и $(2, 2, 9)$ аналогичная операция дает К-набор с любым $b > 13$, при этом волшебнику 36 лет. Таким образом, номер автобуса не может быть больше 13 – ведь в этом случае волшебник B не смог бы понять, 40 лет его напарнику или 36 (а возможно, и еще какие-то варианты нашлись бы).

Кажется, мы ухватили эту головоломку за правильный «хвост». Нам нужно отыскать наименьший номер автобуса, дающий два К-набора – и тогда все последующие значения номеров не будут годиться.

Лирическое отступление

Мог ли у волшебника A быть всего один ребенок? Очевидно, нет: тогда бы его возраст совпадал и с номером автобуса, и с возрастом A, причем это единственный случай, когда $b = a$. Следовательно, узнав (вычислив) a, волшебник B сразу бы определил число детей ($c = 1$) и возраст этого ребенка, – но ведь мы должны верить A, который утверждает, что этого невозможно сделать.

А как насчет двух детей ($c = 2$)? Тогда, вычислив возраст a и зная номер автобуса b, волшебник B знал бы сумму и произведение двух натуральных чисел. Сможет ли он найти сами числа? Геометрическая аналогия этой задачи – известны полупериметр и площадь прямоугольника, стороны которого мы хотим найти (рис.1). Оказывается, что в



$$x \cdot y = a$$
$$x + y = b$$

Рис. 1

этом случае можно узнать сами числа (в геометрическом варианте – стороны прямоугольника) даже в том случае, когда они не являются целыми, однако для этого нужно уметь решать квадратные уравнения. В нашем же случае можно обойтись простым перебором: найти все пары чисел с заданной суммой, начав с пары 1 и $(b - 1)$, и затем «сближая» числа – их произведение при этом будет расти. В тот момент, когда произведение окажется равным a, нужные числа найдены. Таким образом, и для двоих детей A не мог бы сказать «Нет». Следовательно, при переборе можно отбросить все варианты с одним и двумя детьми.

А можно ли еще что-то отбросить? Да. Поскольку мы хотим найти *минимальный* номер автобуса, дающий неоднозначность выбора возрастов детей, то в разных К-наборах не должно быть совпадающих чисел – потому что если бы они были, то их можно было бы убрать из каждого набора, и тогда номер автобуса (сумма) оказался бы еще меньшим. Например, если в одном из наборов есть годовалый ребенок, то в другом его быть не должно. Следовательно, в одном из К-наборов все дети старше года.

Подведем промежуточные итоги. Мы сейчас будем искать разложения номера автобуса b в сумму нескольких натуральных слагаемых, больших 1. При этом рассматриваем только такие разложения, в которых число слагаемых не меньше 3, а сам номер автобуса не больше 12 (потому что для 13 мы уже знаем нужную пару К-наборов, а хотим либо найти еще меньшую, либо убедиться, что ее нет).

Поехали! Перебирать варианты, безусловно, не самая приятная работа, однако порой необходимая для успешного решения жизненных задач. В нашем переборе мы будем отмечать значком ▹ строки с теми значениями a, которые встречаются (во всем переборе) более одного раза, причем с разными b.

Сначала перечислим разложения, в которых каждое слагаемое больше 1:

$6 = 2 + 2 + 2$ (a=8)
▹ $7 = 2 + 2 + 3$ (a=12)
▹ $8 = 2 + 2 + 2 + 2$ (a=16)
▹ $8 = 2 + 2 + 4$ (a=16)
▹ $8 = 2 + 3 + 3$ (a=18)
▹ $9 = 2 + 2 + 2 + 3$ (a=24)
$9 = 2 + 2 + 5$ (a=20)
▹ $9 = 2 + 3 + 4$ (a=24)
$9 = 3 + 3 + 3$ (a=27)
▹ $10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ (a=32)
▹ $10 = 2 + 2 + 2 + 4$ (a=32)
▹ $10 = 2 + 2 + 3 + 3$ (a=36)
▹ $10 = 2 + 2 + 6$ (a=24)
▹ $10 = 2 + 3 + 5$ (a=30)
▹ $10 = 2 + 4 + 4$ (a=32)
▹ $10 = 3 + 3 + 4$ (a=36)
▹ $11 = 2 + 2 + 2 + 2 + 3$ (a=48)
$11 = 2 + 2 + 2 + 5$ (a=40)
▹ $11 = 2 + 2 + 3 + 4$ (a=48)
▹ $11 = 2 + 3 + 3 + 3$ (a=54)
$11 = 2 + 2 + 7$ (a=28)
▹ $11 = 2 + 3 + 6$ (a=36)
$11 = 2 + 4 + 5$ (a=40)
$11 = 3 + 3 + 5$ (a=45)
▹ $11 = 3 + 4 + 4$ (a=48)
$12 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ (a=64)

$12 = 2 + 2 + 2 + 2 + 4$ (a=64)
$12 = 2 + 2 + 2 + 3 + 3$ (a=72)
▹ $12 = 2 + 2 + 2 + 6$ (a=48)
$12 = 2 + 2 + 3 + 5$ (a=60)
$12 = 2 + 2 + 4 + 4$ (a=64)
$12 = 2 + 3 + 3 + 4$ (a=72)
$12 = 3 + 3 + 3 + 3$ (a=81)
▹ $12 = 2 + 2 + 8$ (a=32)
$12 = 2 + 3 + 7$ (a=42)
▹ $12 = 2 + 4 + 6$ (a=48)
$12 = 2 + 5 + 5$ (a=50)
▹ $12 = 3 + 3 + 6$ (a=54)
$12 = 3 + 4 + 5$ (a=60)
$12 = 4 + 4 + 4$ (a=64)

Перебор еще не окончен: ведь есть еще К-наборы с единицей, причем их наверняка больше. Как быть с ними?

Мы не будем выписывать их отдельно, но добавим к уже выписанным наборы из одного и двух слагаемых, а затем отследим каждый из вариантов по уже выписанной таблице – ведь добавление единицы или нескольких единиц

(i) сохраняет произведение;

(ii) увеличивает на сколько-то количество детей;

(iii) увеличивает на столько же число b, т.е. сумму возрастов детей.

К ранее выписанным наборам добавляются:

$2 = 2$ (a=2)
$3 = 3$ (a=3)
…
$11 = 11$ (a=11)
$4 = 2 + 2$ (a=4)
▹ $5 = 2 + 3$ (a=6)
▹ $6 = 3 + 3$ (a=9)
▹ $6 = 2 + 4$ (a=8)
▹ $7 = 3 + 4$ (a=12)
▹ $7 = 2 + 5$ (a=10)
▹ $8 = 4 + 4$ (a=16)
$8 = 3 + 5$ (a=15)
▹ $8 = 2 + 6$ (a=12)
$9 = 4 + 5$ (a=20)
▹ $9 = 3 + 6$ (a=18)
$9 = 2 + 7$ (a=14)
$10 = 5 + 5$ (a=25)
▹ $10 = 4 + 6$ (a=24)
$10 = 3 + 7$ (a=21)
▹ $10 = 2 + 8$ (a=16)
▹ $11 = 5 + 6$ (a=30)
$11 = 4 + 7$ (a=28)
▹ $11 = 3 + 8$ (a=24)
▹ $11 = 2 + 9$ (a=18)

Суммы 12 и выше выписывать уже не станем, так как после добавления единиц они увеличатся.

Поскольку К-наборы должны иметь одинаковые a, нас будут интересовать только строки, отмеченные знаком ▹. Выпишем все наборы снова, упорядочив по возрастанию a:

▹ $5 = 2 + 3$ (a=6)
▹ $6 = 6$ (a=6)

▹ $6 = 2 + 2 + 2 = 2 + 4$ (a=8)
▹ $8 = 8$ (a=8)

▹ $6 = 3 + 3$ (a=9)
▹ $9 = 9$ (a=9)

▹ $7 = 2 + 5$ (a=10)
▹ $10 = 10$ (a=10)

▹ $7 = 2 + 2 + 3 = 3 + 4$ (a=12)
▹ $8 = 2 + 6$ (a=12)

▹ $8 = 2 + 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 4 = 4 + 4$ (a=16)
▹ $10 = 2 + 8$ (a=16)

▹ $8 = 2 + 3 + 3$ (a=18)
▹ $9 = 3 + 6$ (a=18)
▹ $11 = 2 + 9$ (a=18)

▹ $9 = 2 + 2 + 2 + 3 = 2 + 3 + 4$ (a=24)
▹ $10 = 2 + 2 + 6$ (a=24)

▹ $10 = 2 + 3 + 5$ (a=30)
▹ $11 = 5 + 6$ (a=30),

▹ $10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 2 + 4 = 2 + 4 + 4$ (a=32)
▹ $12 = 2 + 2 + 8$ (a=32)

▹ $10 = 2 + 2 + 3 + 3 = 3 + 3 + 4$ (a=36)
▹ $11 = 2 + 3 + 6$ (a=36)

▹ $11 = 2 + 2 + 2 + 2 + 3 = 2 + 2 + 3 + 4 = 3 + 4 + 4$ (a=48)
▹ $12 = 2 + 2 + 2 + 6 = 2 + 4 + 6$ (a=48)

▹ $11 = 2 + 3 + 3 + 3$ (a=54)
▹ $12 = 3 + 3 + 6$ (a=54)

Ну а теперь уже дорешать головоломку до конца можно как угодно – например, отбрасывать все варианты, содержащие равные слагаемые (потому что если такие слагаемые есть, то после их отбрасывания получается другой набор, с меньшей суммой и меньшим произведением). А можем учесть, что большему значению суммы b в другом К-наборе соответствует большее число детей. Так или иначе, из всех выписанных строчек нам подходят всего две –

▹ $11 = 3 + 4 + 4$ (a=48)
▹ $12 = 2 + 2 + 2 + 6$ (a=48)

Они приводят к двум таким К-наборам: $12 = 1 + 3 + 4 + 4 = 2 + 2 + 2 + 6$. Значит, ехали они в автобусе номер 12, а первому волшебнику – 48 лет. Задача решена!

Визуализацию решения этой задачи можно посмотреть в [4].

* * *

Попробуйте самостоятельно разобраться со следующими вариантами диалога волшебников.

1 (упрощение задачи Конвея, автор – Т.Хованова [1]).

А: У меня есть несколько детей, возраст каждого из них – целое положительное число, причем их сумма равна номеру этого автобуса.

В: Как интересно! Возможно, если ты скажешь мне число твоих детей, я смогу вычислить их возраста?

А: Нет, не сможешь.

В: Ага! Наконец-то я узнал, сколько у тебя детей.

Каков номер автобуса?

2 (широко известная версия).

А: У меня трое детей, возраст каждого из них – целое положительное число, причем их сумма равна номеру этого автобуса, а произведение – 36.

В: Но я не могу узнать, сколько им лет!

А: Твоя дочь старше всех моих детей.

В: Спасибо, этого хватает.

Сколько лет детям волшебника А и каков в этот раз номер автобуса?

3 (авторская версия [3]).

А: У меня четверо сыновей, произведение их возрастов равно 180, а сумма их возрастов равна номеру этого автобуса.

Б: Все равно информации недостаточно!

А: Мой младший сын очень любит мороженое.

Б: И этого еще недостаточно.

А: А у старшего сегодня день рождения.

Б: Спасибо, теперь я знаю, сколько им лет!

4. Волшебник поймал Алису и Боба и сказал каждому целое число от 0 до 10, причем их числа отличаются на единицу (и они об этом знают). Диалог:

Алиса: Я не знаю твоего числа, а ты не знаешь моего.

Боб: Я не знаю твоего числа, а ты не знаешь моего. Теперь ты знаешь мое число!

Какое число было сообщено Бобу?

Литература

1. *Tanya Khovanova.* Conway's Wizards. – https://arxiv.org/abs/1210.5460

2. *С.Артемов, Ю.Гиматов, В.Федоров.* Много битов из ничего. – «Квант», 1977, №3.

3. *К.Кноп.* Задача о детях бармена. – https://knop.livejournal.com/375403.html

4. *А.Перепечко.* Визуализация задачи Конвея. – https://kvantik.com/extra/conway-bus/

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Загадочные шары

С.НОВИКОВ

В ЖИЗНИ КАЖДОМУ ЧЕЛОВЕКУ порой приходится иметь дело с закрытым (зачастую незнакомым) объектом, о внутреннем устройстве которого можно лишь догадываться. Такие объекты становятся своеобразными «черными ящиками», когда внешнему наблюдателю доступны лишь входные и выходные сигналы (или какие-либо их величины), а что происходит внутри – неизвестно. О поведении черного ящика можно судить, лишь наблюдая реакции выходных величин на изменение входных. Это дает возможность в конечном итоге раскрыть «секрет» такого объекта.

Возможно, вы уже встречались с черными ящиками – например, в задачах по электричеству. В нашем же случае в качестве черных ящиков выступают десять одинаковых с виду пластмассовых шаров диаметром 75 мм, внутреннее содержание которых неизвестно. Сначала мы опишем поведение шаров в разных опытах-ситуациях. Попробуйте высказать свои соображения, объясняющие причины того, почему шар (или шары) ведет себя определенным образом в описанной ситуации. И лишь потом читайте наши объяснения.

Эксперименты с шарами

Опыт 1. Шары под номерами 1 и 2 устанавливаются на одинаковой высоте на наклонной плоскости. Затем шарам дается

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200805

возможность одновременно начать движение вниз. При этом обнаруживается, что один из шаров достигает нижнего положения раньше другого шара. Почему?

Опыт 2. Шар под номером 3 сначала удерживается в верхней части наклонной плоскости, а затем освобождается от внешнего воздействия. Шар начинает неспешно скатываться, но делает это очень (и очень) медленно. Что может быть причиной такого неспешного движения?

Опыт 3. Шар под номером 4 начинает двигаться из верхнего положения на наклонной плоскости вниз скачками, имитирующими движение тела «шажками». Если шар в верхнем положении повернуть в направлении, перпендикулярном наклонной плоскости, на некоторый угол и вновь отпустить, то поведение шара при скатывании не меняется. Чем может быть вызвано такое скачкообразное движение шара?

Опыт 4. В опыте участвуют шары под номерами 5 и 6. Шары помещают на горизонтальную поверхность, и каждый шар самостоятельно устанавливается на этой поверхности в состоянии покоя только в одном-единственном положении. Подействовав рукой на вершину каждого шара, отклоняют его на некоторый достаточно большой угол от вертикали. После этого шар под номером 5 очень быстро (!) возвращается в первоначальное состояние. Если этот же шар отклонить от вертикали в какую-нибудь другую сторону и отпустить, то он вновь немедленно возвращается в первоначальное положение. Шар же под номером 6 после устранения внешнего воздействия совершает достаточно длительные по времени колебания и лишь затем возвращается в первоначальное состояние покоя. Кроме того, если оба шара подержать в руках, то первое ощущение говорит о том, что массы шаров достаточно значительные, а внутри шаров не чувствуется какихлибо перемещений тел. Почему же шары так по-разному ведут себя, прежде чем возвратиться в первоначальное состояние покоя?

Опыт 5. На фото на рисунке 1 представлен неподвижно лежащий на горизонтальной поверхности шар под номером 7. Рядом с шаром находится отвес, направление нити которого совпадает с белой (назовем ее осевой) линией на корпусе шара. А на фото на рисунке 2 показан этот же шар, который находится в покое на наклонной плоскости,

Рис. 1

Рис. 2

не проявляя никаких попыток нарушить состояние неподвижности. Теперь белая линия на корпусе шара не параллельна нити отвеса, а направлена перпендикулярно наклонной плоскости. При этом шар может находиться в неподвижности на наклонной плоскости, имеющей и другие (большие) углы наклона. И снова осевая линия шара перпендикулярна наклонной плоскости. Почему возможно такое поведение шара на наклонной плоскости?

Опыт 6. Шар под номером 8 размещается на наклонной плоскости, и он остается там в неподвижности в том положении, в котором его поместили на плоскость. Если шар, не отрывая от наклонной плоскости, повернуть на некоторый угол в любую сторону, то он останется неподвижным и не предпримет никаких попыток к скатыванию. Такие действия можно повторить неоднократно, однако поведение шара (его неподвижность на плоскости) останется неизменным. Почему?

Опыт 7. Шар под номером 9 (фото на рисунке 3) подвешен с помощью нити к лапке штатива. К корпусу шара с помощью скотча прикреплена пальчиковая батарейка, а на корпусе шара имеются два отверстия-гнезда для подключения этой батарейки к шару. Если с помощью подводящих проводов соединить шар с батарейкой, то шар начинает вращаться либо по часовой стрелке, либо против (при наблюдении сверху). Если же поменять полярность батарейки, то шар будет вращаться в другую сторону. Что может быть причиной такого двойственного поведения шара?

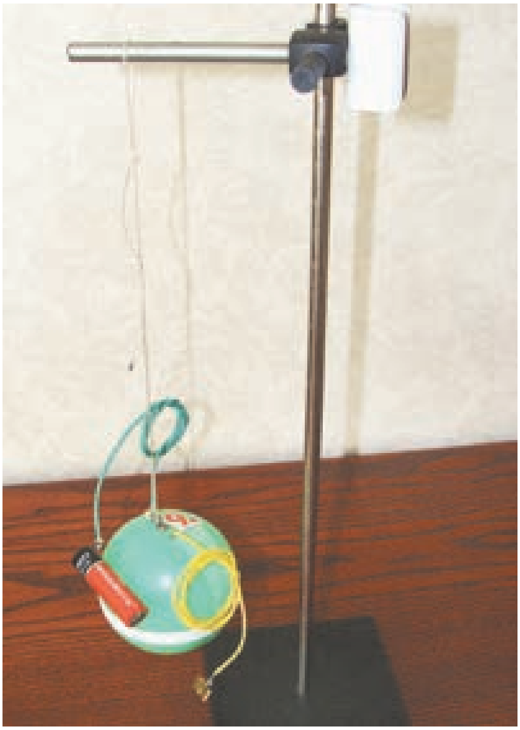


Рис. 3

Опыт 8. Шар под номером 10 с помощью скотча прикреплен к небольшой щетке для чистки одежды (фото на рисунке 4). Щетка с шаром находятся на горизонтальной поверхности, а на корпусе шара опять имеются гнезда для подключения его к пальчиковой батарейке. Если такое подключение осуществить, то шар начинает вибрировать, а щетка начинает двигаться в определенном направлении. При смене полярности батарейки направление движения щетки с шаром меняется на противоположное. Почему?

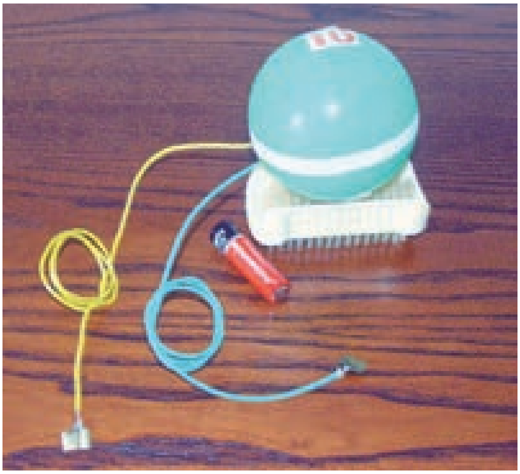


Рис. 4

Объяснения экспериментов

Опыт 1. Ответ «лежит на поверхности»: масса одного шара больше массы другого. Быстрее скатится с наклонной плоскости более легкий шар, в нашем случае он пустой. У массивного шара момент инерции больше, чем у пустого, и ему для придания вращения нужна значительно большая энергия. Для демонстрации этого опыта у нас внутрь второго шара был помещен кусок поролона с большим числом вкрапленных в него массивных свинцовых шариков-дробинок.

Опыт 2. Внутри шара может находиться «сыпучее» вещество. При скатывании шара вещество медленно перемещается из более верхнего положения в нижнее. Это и замедляет движение шара вниз по наклонной плоскости. В нашем варианте для этого использовались мелкие (не более 1 мм в диаметре) свинцовые дробинки.

Некогда я увидел этот опыт на внеклассном мероприятии учителей физики в гимназии п. Удельная Московской области. В их варианте внутрь шара был помещен жидкий мед. Эффект опыта был впечатляющий.

Опыт 3. Внутрь нашего шара был помещен массивный кусок свинца кубической формы. При скатывании шара с наклонной плоскости куб переворачивался. Это и придавало шару скачкообразный характер движения.

Опыт 4. Оба шара демонстрируют устойчивое положение равновесия. Устойчивость тела, имеющего точку опоры, имеет место тогда, когда его центр тяжести занимает наиболее низкое положение из всех возможных.

Пятый шар иллюстрирует поведение детской игрушки «неваляшки». Внутри шара к его корпусу прикреплен с помощью клея массивный свинцовый груз. В состоянии покоя (устойчивого равновесия) центр масс шара расположен очень низко, недалеко от точки опоры. Кроме того, точка центра масс и точка опоры лежат на одной вертикальной (отвесной и осевой) линии. Когда шар наклоняют, его центр тяжести поднимается и смещается в сторону по отношению к точке опоры и вертикальной линии. Момент силы тяжести относительно точки опоры стремится вернуть шар в первоначальное состояние.

Внутри шестого шара чуть ниже его экваториальной плоскости размещен массивный свинцовый диск («бублик» с прямоугольным сечением), который жестко прикреплен к корпусу. Отличие от пятого шара заключается в том, что его центр масс находится высоко от точки опоры. При наклоне шара плечо силы тяжести относительно точки опоры оказывается значительно большим, чем в случае с «неваляшкой». Поэтому и момент силы тяжести относительно точки опоры будет больше, чем в предыдущем случае. В результате амплитуда колебаний шара увеличивается, а значит, увеличивается и время затухания колебаний.

Опыт 5. Внимательно посмотрев на фотографию на рисунке 3, можно увидеть на поверхности наклонной плоскости материю. Оказывается, под материей спрятана пластина из железа. Шар удерживается на такой наклонной плоскости малогабаритным неодимовым (в форме таблетки) магнитом, который с помощью клея прикреплен к его внутренней поверхности.

Опыт 6. Внутри шара находится неодимовый магнит в «свободном» состоянии. При повороте шара на некоторый угол магнит скользит по его внутренней поверхности, занимая новое положение, а шар продолжает оставаться неподвижным.

Опыт 7. Внутри шара имеется миниатюрный электродвигатель, который жестко прикреплен к корпусу. Ось вращения (вал) электродвигателя совпадает с направлением диаметральной вертикальной линии шара. На валу двигателя укреплен небольшой массивный диск. При подключении электродвигателя к источнику тока вал и массивный диск начинают вращаться в определенную сторону. Корпус же шара при этом поворачивается в другую сторону. Все это является следствием проявления закона сохранения момента импульса. Если суммарный момент всех внешних сил, действующих на тело, равен нулю, то момент импульса этого тела остается постоянным. Если же у неподвижного тела какая-то его часть приобретает некоторый момент импульса, имеющий определенный знак (момент импульса – векторная величина), то некоторая другая его часть непременно приобретет момент импульса противоположного знака.

Закон сохранения момента импульса учитывается при конструировании вертолетов. Так, вертолеты конструкции М.Л.Миля имеют два винта. Первый винт-ротор вращается в определенном направлении в горизонтальной плоскости над кабиной вертолета. А чтобы корпус вертолета не вращался в другую сторону, позади него размещен хвостовой винт, который, работая, препятствует вращению корпуса. В вертолетах, изготовленных по разработкам Н.И.Камова, имеются два винта-ротора, размещенных на одной оси над кабиной, но вращающихся в противоположных направлениях.

Опыт 8. Внутри шара находится миниатюрный электродвигатель, который жестко прикреплен к корпусу шара. На вал электродвигателя насажен диск, причем так, что его ось смещена относительно оси вала (говорят – диск насажен с эксцентриситетом). В результате при работе электродвигателя возникают механические колебания, которые называются вибрациями. Эти вибрации и заставляют двигаться щетку вместе с шаром.

Колебательное движение эксцентриков используется в работе вибрационных конвейеров, предназначенных для транспортировки тонкодисперсных (до десятков микрон), зернистых и кусковых (до 1000 мм и более) материалов. Они часто применяются для перемещения руды в горнорудной промышленности.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Политехническая олимпиада школьников

Политехническая олимпиада школьников в 2019/20 учебном году проводилась по четырем предметам: математике, физике, химии и информатике. Отборочный тур проходил заочно с применением интернет-технологий. Участники выполняли задания тура на официальном сайте олимпиады. Победители и призеры отборочного тура были приглашены к участию в заключительном туре, который прошел в Санкт-Петербургском политехническом университете в форме очного письменного испытания.

Информацию об олимпиаде 2020/21 учебного года можно получить на сайтах СПбПУ: www.spbstu.ru и olymp.spbstu.ru

Ниже приводятся задачи отборочного и заключительного туров олимпиады по математике, физике и информатике.

Математика

Отборочный тур

1. Найдите количество упорядоченных пар натуральных чисел (n,m), сумма которых равна 120, а наибольший общий делитель этих чисел равен 15.

2. Какова вероятность того, что двузначное натуральное число не делится ни на 6, ни на 8?

3. Найдите $24(x+y)/\pi$, если

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x}+\frac{1}{\operatorname{tg} y}=\frac{1}{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}-1 \text{ и } (x+y)\in(0;\pi).$$

4. Стоимость одной тетради выражается целым числом рублей. Суммарная стоимость 7 тетрадей не меньше 200 руб. и не больше 220 руб., а суммарная стоимость 11 таких же тетрадей – не менее 340 руб. Сколько стоит одна тетрадь?

5. При каких значениях a уравнения $x^3+ax^2-4=0$ и $x^2+ax-2=0$ имеют общий корень?

6. Сторона треугольника лежит против угла 120° и имеет длину $4\sqrt[4]{3}$. Найдите наибольшее возможное значение площади треугольника. Убедитесь, что это значение выражается целым числом.

7. Для последовательности $\{a_n\}$ справедливы равенства $a_1=1$, $a_2=3$ и $a_n=\dfrac{a_{n-1}a_{n-2}}{2a_{n-2}-a_{n-1}}$ для натуральных чисел n, превосходящих 2. Найдите количество членов этой последовательности, лежащих в промежутке $[-1;-1/5]$.

8. Число 50 дважды увеличивали на $k\%$, а потом дважды уменьшали на 50%. В итоге получилось число 18. Найдите k.

9. При каком положительном значении a система

$$\begin{cases}\left|x^2-xy-2y^2\right|=(x+y)^2,\\ \left(x-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+y^2=1\end{cases}$$

имеет ровно три решения?

10. Найдите значение выражения $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}$, если $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}=\dfrac{1}{2}$, а $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия.

Заключительный тур

1. Найдите целые решения уравнения $2^{x^2-8}+2^{6-2x}=3$.

2. Решите неравенство

$$\left(x^2-6x+8\right)\sqrt{x^2-9x+18}\le 0.$$

3. Пусть $f_1(x)=(x+1)^3-1$; $f_n(x)=f_1\left(f_{n-1}(x)\right)$ при $n\ge 2$. Найдите количество натуральных чисел n, для которых $f_n(2)\in\left(3^{3^5},3^{3^7}\right)$.

4. Найдите такое натуральное число n, что числа $n+7$ и $n+51$ являются квадратами натуральных чисел.

5. В четырех ящиках лежат игрушки, причем в различных ящиках разное количество игрушек. Сколько игрушек в каждом ящике, если их общее число равно 28, а самое большое число игрушек в ящике в два раза больше самого маленького?

6. Для каких значений a уравнение $[x]-\{x\}=ax$ имеет 4 решения $x \geq 0$? Здесь $[x]$ – целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\}=x-[x]$ –дробная часть числа x.

7. Пассажир прошел по движущемуся траволатору, вступив на 30 ступеней. В следующий раз он шел с той же скоростью навстречу движению траволатора и вступил на 45 ступеней. На сколько ступеней вступит пассажир, если ему придется идти по неподвижному траволатору?

8. Сторона треугольника лежит против угла $120°$ и имеет длину 3. Найдите наибольшее возможное значение периметра треугольника.

9. Решите систему

$$\begin{cases} 1+y^2x^{-2}=16x^{-2}-2yx^{-1}, \\ \left(x^2+y^2\right)\left(x^3+y^3\right)=280. \end{cases}$$

10. Найдите все многочлены шестой степени $P(x)$ такие, что $P(x)\left(x^2-1\right)=ax^n-3x^4$ при каких-либо значениях a и n.

Физика

Отборочный тур

Каждая задача оценивалась в 10 баллов.

1. Паровозик доехал из Ромашково до деревни Гадюкино за $t_1=18{,}5$ ч, сделав по дороге $n=20$ остановок. Перед всеми остановками он двигался с одинаковым замедлением, а отъезжал от остановок с таким же одинаковым ускорением, остальную часть пути он ехал с постоянной максимальной скоростью. Оказалось, что так быстро он ехал только $t_2=5{,}5$ ч, а еще $t_3=2{,}5$ ч простоял на остановках. Сколько времени заняла бы дорога, если бы паровозик ехал без остановок?

2. Сбежавшие от бабушки Федоры топоры съезжают без начальной скорости со снежной горки – наклонной плоскости, составляющей угол $30°$ с горизонтом. Оказалось, что топоры, смазанные лыжной мазью, двигаются практически без трения и их спуск занимает на 20% меньше времени, чем у топоров без смазки. Чему равен коэффициент трения для несмазанных топоров?

3. Когда Винни-Пух завис на воздушном шаре у дупла с пчелами, которые что-то подозревали, Пятачок, чтобы спасти друга, выстрелил вверх по шару резиновой пробкой. К сожалению, пробка попала не в шар, а в Винни-Пуха. На какую высоту (по сравнению с первоначальной) поднялся Винни? Удар считать абсолютно неупругим. Масса пробки $m_1=26$ г, масса Винни-Пуха $m_2=1{,}05$ кг. Скорость пробки перед ударом была $v_1=13$ м/с.

4. После того как Свен перескочил на плавающую рядом льдину, она погрузилась на $x_1=8$ см. А когда от нее отломился кусок площадью $S=0{,}9$ м^2, погрузилась еще на $x_2=5{,}6$ см. Сколько весит Свен?

5. На ветке висело 7 яблок. Одно яблоко упало. За время его падения ветка успела совершить 7 полных колебаний. Затем с ветки упало еще одно яблоко. Сколько колебаний успела совершить ветка за время его падения? Все яблоки висят на самом конце упругой ветки, масса которой много меньше массы яблок.

6. Чебурашка подарил Крокодилу Гене на день рождения три майларовых шара. Блестящие, как будто металлические, шары очень понравились Гене, и он решил пройтись с ними по улице. Увы, гладкие шары сморщились и потеряли форму... На сколько процентов уменьшился объем шаров на улице, если температура воздуха в этот день была $t_1=5$ °С, а дома у Гены была $t_2=19$ °С?

Примечание. В отличие от резины, из которой сделаны обычные надувные шары, майлар (металлизированный полиэтилентерефталат, он же лавсан, ПЭТФ и т.д.) практически не растягивается.

7. На дорогу от Ромашкова до Гадюкино паровозик расходует $m=1$ т дров с теплотворной способностью $L=7{,}9$ МДж/кг, средняя сила тяги паровозика $F=7{,}2$ кН. В качестве рабочего тела в паровозике используется перегретый водяной пар при температуре $t_1=412$ °С, а температура окружающего воздуха $t_2=10$ °С. Если бы паровозик работал по циклу Карно, его КПД был бы в $n=1{,}4$ раза больше имеющегося. Чему равно расстояние между населенными пунктами Ромашково и Гадюкино по железной дороге?

8. Пока Чебурашка нес, прижимая к себе, шары для Крокодила Гены, от трения о его мех два из них зарядились: один до потенциала $\varphi_1 = 273$ В, второй до потенциала $\varphi_2 = 121$ В. После того как заряженные шары соприкоснулись, их потенциал стал равен $\varphi = 201$ В. Чему равен диаметр второго заряженного шара, если диаметр первого $d_1 = 27$ см?

9. Улетевший у Крокодила Гены майларовый шар замкнул собою линию электропередач и взорвался от протекавшего по нему тока. Какой заряд прошел через шар, если при взрыве выделилась энергия $Q = 50$ Дж, а напряжение между проводами в момент взрыва было $U = 455$ В?

10. Ворвавшись в огромный квадратный зал, Джон Коннор увидел прямо напротив себя в середине противоположной стены Главный Квантовый Чип Скайнета. Путь к нему преграждала прозрачная стена, перегораживающая зал по диагонали, которая оказалась заполнена водой, как огромный аквариум. Джон прицелился и выстрелил. Урановая пуля пробила «аквариум», не отклонившись от заданного направления, водяная стена рухнула, окатив Коннора потоками воды. Посмотрев вперед, Джон не поверил своим глазам – он промахнулся на $d = 28$ см! Какой толщины была водяная стена? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$, толщина стеклянных стенок «аквариума» пренебрежимо мала.

Заключительный тур

1. Шероховатая доска движется с постоянным горизонтальным ускорением a, сохраняя постоянным угол наклона α к вертикали (рис.1). Доска своей нижней поверхностью толкает перед собой массивный брусок. При ускорении $a > 2g$ брусок с доской движутся вместе как единое целое. Найдите угол α, если коэффициент трения между доской и бруском $\mu = 0{,}8$. (10 баллов)

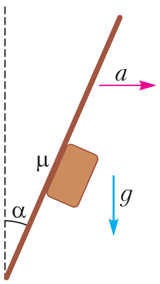


Рис. 1

2. С концов листочка массой M и длиной l, который может перемещаться без сопротивления по поверхности воды, навстречу друг другу бегут две водомерки массами $4m$ и m с постоянными относительно листочка скоростями. Первая водомерка (массой $4m$) бежит в три раза быстрее второй. На сколько сместится листочек относительно своего первоначального положения, когда первая водомерка добежит до его конца? (25 б.)

3. В запаянной с обоих концов горизонтальной трубке по краям находятся два столбика ртути длиной 3 см и 5 см, а между ними пузырек воздуха. Если поставить трубку вертикально, то длина пузырька оказывается на 1 см меньше первоначальной, а если трубку перевернуть, то меньше на 2 см. Чему равна длина трубки? (15 б.)

4. Схема состоит из четырех одинаковых резисторов сопротивлением R и идеального диода, соединенных так, как показано на рисунке 2. Между клеммами A и B прикладывается одно и то же по абсолютной величине напряжение U, причем в первый раз потенциал клеммы A больше потенциала клеммы B и наоборот во втором случае. Найдите, во сколько раз тепловая мощность, выделяющаяся на первом резисторе, отличается в этих двух случаях. (15 б.)

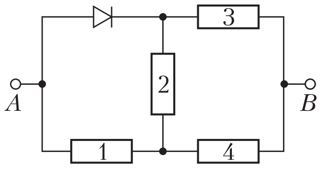


Рис. 2

5. Проводящий диск вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 100$ рад/с в перпендикулярном плоскости диска однородном магнитном поле (рис.3). На сколько необходимо изменить угловую скорость вращения, чтобы после заполнения плоского воздушного конденсатора C диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 6$ заряд на обкладках конденсатора остался неизменным? (25 б.)

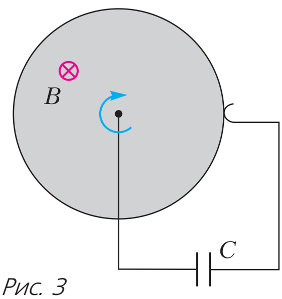


Рис. 3

6. Верхнее основание стеклянного цилиндра диаметром $D = 20$ см и высотой $h = 10$ см закрашено краской. Найдите минимальный размер области, которую надо очистить от краски, чтобы через нее было видно все нижнее основание. Показатель преломления стекла 1,5. (10 б.)

Информатика

Отборочный тур

Избранные задачи

1. Ученые-яблокоедоведы построили математическую модель численности популяции яблокоедов.

Входные данные:

P – численность популяции;

N – длительность периода моделирования в годах;

U[i], i=1..N – булевские переменные, значение Истина означает, что i-й год был урожайным на яблоки.

Алгоритм расчета:

Ввод P, N
НЦ **Для** i **От** 1 **До** N
Если U[i]=**Истина** **То** P := P * A **Иначе** P := P * B
Всё
КЦ
Вывод P

Когда яблокоедоведы ввели в модель текущую численность популяции и выданные коллегами-яблоковедами прогнозы урожайности яблок на 5 ближайших лет, результатом оказалось число 4725 – столько яблокоедов будет через 5 лет по мнению математической модели. Какова текущая численность популяции яблокоедов, если известно, что A и B – натуральные числа и A > B?

2. Школьник Сидор недавно открыл для себя системы счисления. Особенно понравились ему «круглые» числа – где 1 и потом много ноликов. Сидору понравилось записывать такие числа из разных систем счисления (записывал он их, естественно, в той системе, в которой они были круглыми, причем в порядке возрастания). Числа он записывал подряд, без просветов – получалась строка из цифр. Например, в двоичной системе начало этой строки было таким: 110100100010000... Писал числа Сидор на листочках для заметок, когда листок заканчивался – Сидор дописывал остаток числа на следующем листке (листках) и далее, когда число заканчивалось, начинал следующее. Сколько единиц оказалось у Сидора на 33-м листке, если числа он писал в троичной системе, а на листке помещается ровно 333333 цифры?

3. Вам предстоит пройти небольшой квест из взаимосвязанных заданий.

1. Оцените истинность приведенных ниже высказываний (1 – истина, 0 – ложь). Выпишите ответы подряд.

- Наши минуты и секунды – наследие системы счисления древних шумеров.
- Диапазон возможных значений у байта без знака вдвое меньше, чем у байта со знаком.
- Существуют недвоичные компьютеры.
- В троичной системе счисления четные числа оканчиваются нулем.
- Компьютер не выполняет арифметические операции, а просто берет их результаты из таблиц.
- $BA_N > AB_N$ при любом натуральном $N > 9$.
- Любое двоичное число, нацело разделенное на 2, равно тому же числу, побитно сдвинутому вправо.
- В системе счисления с основанием 21 E + F = 19.

2. Трактуя ответ задания 1 как двоичное число, найдите максимальное число, которое можно получить из него за несколько (от 0 до 7) циклических сдвигов влево.

3. В какой системе счисления результат задания 2 записывается как A2?

4. Переведите результат задания 1 в десятичную систему счисления. Затем определите значение этого числа, если трактовать его как представленное в системе счисления с основанием, равным трети ответа задания 3.

4. Назовем палиндриндексом натурального числа количество систем счисления, в которых число многозначно и симметрично (рассматриваются системы счисления с основаниями от 2 до 36). Например, палиндриндекс числа 46 равен 3, так как $46 = 232_4 = 141_5 = 22_{22}$. А вот у числа 47 палиндриндекс равен 0. Найдите в интервале от 600 до 666 два последовательных числа с палиндриндексом 0. В качестве ответа введите их сумму.

5. В старом замке с каждым ударом часов появляется призрак. Время жизни призрака S секунд. Бьют часы, как полагается, столько раз, сколько часов прошло с момента последней полуночи или последнего полудня. Первый удар следует ровно в момент наступления очередного часа, интервал между ударами 1 секунда. Требуется сосчитать максимальное возможное количество призраков в замке.

...Стоп, не начинайте пока писать программу! Дело в том, что замок расположен не на Земле. Там, где он находится, в сутках по 2*H часов, а в часе M минут, в минуте M секунд. Гарантируется, что входные данные корректны, число призраков конечно.

1) Найдите максимальное число призраков при H = 12, M = 60, S = 10808.

2) Найдите максимальное число призраков при H = 29, M = 99, S = 29410.

6. Дан алгоритм (рис.4). Сколько существует различных пар значений A и B, при которых алгоритм зацикливается?

```
Алг Цел A,Цел B
Пока A > 0 И B > 0 И A < 5 И B < 5
НЦ
K := (A mod 2) + (B mod 2)
Если K = 1 То
  A := A + 1
Иначе
  Если K = 0 То
    A := A − 1
  Иначе
    Если B < 3 То
      B := B − 1
    Иначе
      B := B + 1
    Всё
  Всё
Всё
КЦ
Кон
```

Рис. 4

7. Число N – байт без знака; AND, OR, NOT – поразрядные логические операции. Из приведенных ниже высказываний выберите те, которые, будучи истинными, несут ровно 3 бита информации о числе N.

A. (NOT N) > 3
B. N OR 229 = 239
C. N OR 28 = 0
D. N AND 90 = 2
E. N < 32
F. N AND 168 = 128

Заключительный тур

1. Большая закупка (8 баллов)

Вы ведете закупки материалов в фирме, занимающейся ремонтом квартир. Краска у вашего поставщика продается в ведрах и в банках. Имеется электронная таблица (рис.5). Предполагается, что при внесении в столбец «Количество» количества краски, которое требуется, в столбце «Стоимость» появляется минимальная сумма, которую следует заплатить для приобретения количества литров краски не меньше требуемого. Какую формулу следует записать в ячейке G6, чтобы выполнять необходимые расчеты? Формула должна быть тиражируемой (таблица тянется вниз на много строк). Гарантируется, что объем ведра не меньше объема банки.

2. Непарное число (12 б.)

Имеется функция f (рис.6), работающая с двумя байтами без знака, результат – тоже байт без знака. Студент Сидор написал программу, которая присваивает переменной S сначала значение 0, а потом в цикле 101 раз получает с клавиатуры число X и присваивает S значение f(S, X). Когда Сидор запустил программу, он ввел 101 число, при этом

	A	C	D	E	F	G	H
1							
2		Объём ведра, л	10				
3		Объём банки, л	3				
4							
5		Артикул краски	Цена за ведро	Цена за банку	Количество, л	Стоимость	
6		QWE13	700,00 р	250,00 р			
7		RTY77	922,00 р	315,00 р			
8		UIO21р	520,00 р	170,00 р			

Рис. 5

```
Алг Цел f (Цел a, Цел b)
   Цел t,d,k
 Нач
   t := 0
   d:= 1
  НЦ Пока d  < 256
      k := mod(mod(a,2) + mod(b,2) +72),2)
     a := div(a,2)
     b  := div(b,2)
    t := t + k * d
   d  := d  + d
  КЦ
  Знач := t
Кон
```

Рис. 6

известно, что все числа, кроме 49-го по счету, встречались среди введенных дважды (не обязательно подряд). Каким было 49-е число, если известно, что 11-е число равнялось 200 и 77-м было число 3, а в результате программа вывела 55?

3. Линька яблокоедов (7 б.)

Весной яблокоеды линяют, каждый из них старается сбросить все иголки. Но в силу особенностей организма яблокоеды сбрасывают иголки только пачками: яблокоед может при любом количестве иголок, не меньшем 3, сбросить 3 иголки, кроме того, при четном количестве иголок он может сбросить половину из них, а при нечетном не меньше 5 может сбросить 4 иголки. При этом если количество иголок у яблокоеда после его изменения делится без остатка на 3, то у него отрастают 4 новые иголки, а если оно не делится на 3, но делится на 7 – то 6 новых иголок. В вольере 4 линяющих яблокоеда. В данный момент у первого 31 иголка, у второго 73, у третьего 19, у четвертого 122. У скольких из них есть возможность сбросить все иголки (количество сбросов не ограничено)?

4. Пометка территории (15 б.)

Будучи помещенным в свободную ячейку стеллажа-массива, яблокоед начинает метить территорию. Делает он это по такому рекурсивному алгоритму (описан он слегка неформально, но Яблокоеду понятно; рис.7). Выполняя его, яблокоед постепенно захватывает весь стеллаж, кроме занятых ячеек и

```
Алг Захват (ячейка)
Нач
  Если ячейка не помечена То
    Пометить ячейку
    Если ячейка ниже существует и свободна То
      Захват (ячейка ниже)
    Всё
    Если ячейка слева существует и свободна То
      Захват (ячейка слева)
    Всё
    Если ячейка выше существует и свободна То
      Захват (ячейка выше)
    Всё
    Если ячейка справа существует и свободна То
      Захват (ячейка справа)
    Всё
  Всё
```

Рис. 7

ячеек, отгороженных занятыми от доступного яблокоеду пространства.

Яблокоеда поместили в верхний левый угол – ячейку с координатами (1, 1) – стеллажа-массива размером $2n + 1$ на $2n + 1$, $1 < n < 1000$, в котором в среднем «столбце» и в средней «строке» все ячейки, кроме центральных трех, заняты.

а) В какой ячейке яблокоед закончит захват стеллажа при $n = 4$?

б) В какой ячейке яблокоед закончит захват стеллажа при $n = 789$?

5. Первоклашки (15 б.)

Семь первоклашек стоят в одном ряду. Каждый из них может находиться в одном из двух состояний: 1 – смотрит в телефон, 2 – жует бутерброд. Известно, что крайнего правого первоклашку можно перевести из наблюдающего в жующее состояние, просто вытащив из рук телефон и подсунув бутерброд (и наоборот). Состояние других первоклашек можно изменить, только если ближайший справа первоклашка смотрит в телефон, а остальные первоклашки справа (если они есть) жуют бутерброды. За 5 секунд можно изменить состояние только одного первоклашки. Вначале все первоклашки смотрят в телефон. Так как наступил обеденный перерыв, необходимо перевести их всех в жующее состояние. За какое минимальное количество секунд преподаватель сможет это сделать?

6. Зашифрованный пароль (8 б.)

Петя зарегистрировался на сайте и, чтобы не забыть слово-пароль, решил выписать его в блокнот, перед этим зашифровав. Вот что написано в блокноте Пети:

$$110111111110000111000000001110$$

Какое слово было использовано для пароля? Условие Фано Петя, к счастью, еще не проходил.

7. Заклинания (10 б.)

В Хогвартсе практическое занятие: 200 учеников идут вдоль аллеи из 200 яблонь и отрабатывают заклинания «Расцветамус» и «Опадамус». Первый ученик заставляет все яблони расцвести. Второй меняет состояние каждой второй яблони, и с четных яблонь цветы осыпаются. Третий меняет состояние каждой третьей яблони на противоположное, то же проделывает четвертый с каждой четвертой яблоней и т.д. Сколько цветущих яблонь будет на аллее после окончания занятия?

8. Блогеры (10 б.)

Дуся и Буся – блогеры, записывающие аудио-подкасты. Сегодня они записывали свои подкасты про проблемы подснежников зимой без снега и начали запись одновременно. Дуся записывала свой монолог на телефон с одноканальным микрофоном, поддерживающим частоту дискретизации 24576 Гц с глубиной звука в 32 бита. Буся записывалась на студии в стереорежиме с четырьмя каналами записи, каждый из которых поддерживал частоту дискретизации 98304 Гц с глубиной звука в 64 бита. Дуся записывала сообщение 4 минуты, потом 6 минут готовила к загрузке (на информационном объеме файла это не отразилось) и начала загружать на свой канал, причем скорость ее соединения составила 1 МБит/с. Буся ничего не редактировала и сразу после завершения записи начала выкладывать свою запись со скоростью 2 Мбит/с. Сколько минут записывалась Буся, если известно, что подкасты загрузились одновременно?

9. Логическое выражение (5 б.)

Замените логическое выражение тождественным ему, содержащим не более одной логической операции:

$$\left(A \equiv \left(\neg A > B\right)\right) \wedge \left(B \equiv \left(B \to A\right)\right).$$

10. Поисковые запросы (10 б.)

На рисунке 8 представлены результаты выполнения нескольких поисковых запросов в пределах домена. Сколько бит информации о значении X несет в себе сообщение «По запросам “ананас & беспредел” и “ананас & валторна” выдается одинаковое количество результатов» при условии, что значение Y известно и лежит в пределах от 25 до 35?

Запрос	Количество страниц
ананас | беспредел | валторна	77
беспредел & валторна	5
беспредел | валторна	62
ананас & беспредел & валторна	X
ананас	Y

Рис. 8

Публикацию по математике подготовили И.Комарчев, А.Моисеев, С.Преображенский;

по физике – Т.Андреева, М.Крупина, В.Кузьмичёв;

по информатике – С.Костоуров, Е.Крылова, К.Плотникова

Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана

Физика

Олимпиада «Шаг в будущее 2019–2020»

Отборочный тур

(*проведен дистанционно*)

Вариант 1

1. Шар массой $m = 0{,}25$ кг и объемом $V = 1{,}0$ дм^3 падает в воду с высоты $H = 2$ м и погружается на глубину $h = 0{,}5$ м, а затем выскакивает из воды (плотность шара меньше плотности воды). Найдите высоту h_1, на которую поднимется шар, выскочив из воды, считая силу сопротивления воды постоянной. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2. Два одинаковых упругих шарика подвешены на невесомых нерастяжимых нитях таким образом, что нити параллельны и центры тяжести шариков находятся на одном уровне (рис.1). Длина нити первого шарика $L_1 = 1$ м, второго $L_2 = 0{,}25$ м. Нить второго шарика отклонили на небольшой угол и отпустили. Сколько раз столкнутся шарики за время $\tau = 4$ с, прошедшее с начала движения второго шарика? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

3. По внутренней цилиндрической поверхности радиусом $R = 30$ см катится диск радиусом $r = 20$ см (рис.2). Определите радиус ρ кривизны траектории точки A диска. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

4. На гладком горизонтальном столе лежит шар массой $M = 8$ кг, прикрепленный к пружине с коэффициентом упругости $k = 10^4$ кг/с^2 (рис.3). В шар попадает тело массой $m = 1$ кг, имеющее в момент удара скорость, направленную вдоль оси пружины. Считая удар абсолютно неупругим, определите количество теплоты, выделившееся при ударе, если известно, что максимальная деформация пружины $A = 0{,}1$ м.

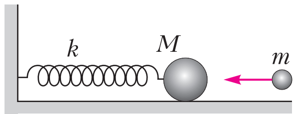


Рис. 3

5. В паровой котел объемом $V = 5$ м^3 накачали воду массой $m_1 = 20$ кг и нагрели ее до температуры $t = 180$ °С. Найдите давление p паров в котле. Плотность насыщенных паров воды при этой температуре равна $\rho = 5{,}05$ кг/м^3.

6. Идеальный газ используется как рабочее тело в тепловой машине, работающей по циклу, состоящему из адиабатического расширения *1–2*, изотермического сжатия *2–3* и изобарического расширения *3–1* (рис.4). КПД цикла $\eta = 0{,}25$. При изотермическом сжатии над газом совершается работа $A_T = 300$ Дж. Какую работу совершает машина в этом цикле?

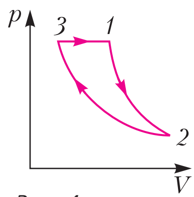


Рис. 4

7. Внутри электрически нейтрального проводящего шара радиусом R имеются три полости, в которых размещены точечные заряды $+q$ в одной полости, $-2q$ в другой и $+4q$ в третьей (рис.5). Найдите отношение потенциала в точке, находящейся на расстоянии

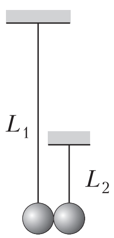


Рис. 1

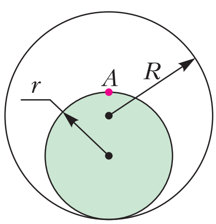


Рис. 2

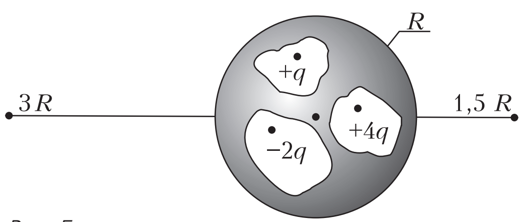


Рис. 5

$1{,}5R$ от центра шара, к потенциалу в точке, находящейся на расстоянии $3R$ от центра шара.

8. Из проводников изготовлен куб. В середине каждого ребра куба расположен воздушный конденсатор емкостью C, полностью заполненный диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$ (рис.6). Найдите отношение емкости этой батареи конденсаторов к емкости батареи, в которой из конденсаторов, расположенных на ребрах, выходящих из вершин A и B, диэлектрик удалили. Куб включается в цепь вершинами A и B.

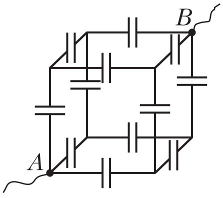


Рис. 6

9. Две вертикальные проводящие рейки, расстояние между которыми $L = 25$ см, находятся в однородном магнитном поле, индукция которого $B = 1$ Тл направлена перпендикулярно плоскости рисунка 7. Сверху концы реек соединены через батарею с ЭДС $\mathcal{E} = 6$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом, а снизу – через резистор сопротивлением $R = 6$ Ом. В начальный момент проводящую перемычку AC массой $m = 100$ г, удерживают неподвижной, а затем отпускают. Через некоторое время перемычка движется вниз с установившейся скоростью. Найдите установившуюся скорость перемычки.

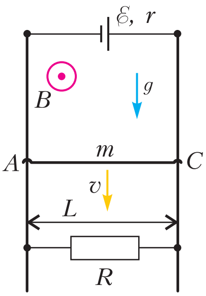


Рис. 7

Вариант 2

1. Найдите величину F вертикально направленной силы, которую нужно приложить к однородному равнобокому уголку массой m (рис.8), чтобы удержать его в равновесии между двумя призматическими опорами, при этом сторона уголка между опорами A и B располагается вертикально. Коэффициент трения между уголком и опорами $\mu = 1$.

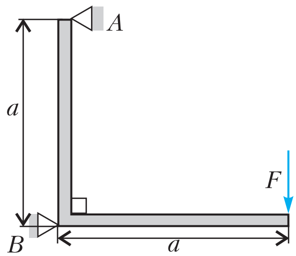


Рис. 8

2. На гладкой горизонтальной поверхности на расстоянии $L = 3$ м от вертикальной стенки находится шар массой M. Другой шар такого же размера массой m скользит с некоторой скоростью по направлению от стенки к первому шару M. После абсолютно упругого удара шаров шар массой m достигает стенки и, упруго отразившись от нее, догоняет шар массой M. Определите, на каком расстоянии s от стенки произошло второе соударение, если $n = M/m = 4$.

3. Кривошип OA длиной 50 см вращается равномерно в вертикальной плоскости (рис.9)

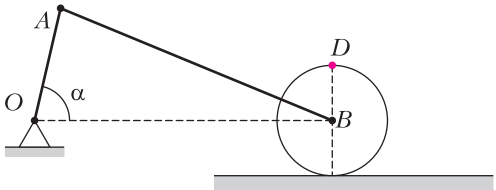


Рис. 9

вокруг неподвижной точки O с угловой скоростью $\omega = 1\,\text{с}^{-1}$. Шатун AB шарнирно соединен с кривошипом и центром колеса, которое катится без проскальзывания по прямой, параллельной OB. Определите скорость точки D колеса в метрах в секунду в момент, когда угол между кривошипом и прямой OB равен $\alpha = 90°$.

4. Призматический сосуд длиной 3 м и шириной 1 м разделен перегородкой на два отсека длиной $L_1 = 2$ м и $L_2 = 1$ м (рис.10). Сосуд заполнен водой до высоты $h_1 = 1$ м в первом отсеке и до высоты $h_2 = 1{,}75$ м во втором отсеке. Сосуд перемещается горизонтально с постоянным ускорением $a = 0{,}4$ м/с^2. Определите суммарную силу давления воды на перегородку. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

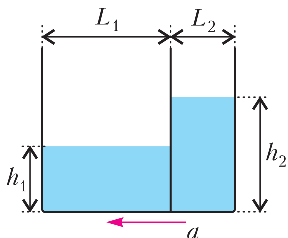


Рис. 10

5. Манометр на баллоне со сжатым газом показывал сначала 11 атм., а после того, как часть газа израсходовали, показывает 3 атм. Какую часть первоначальной массы газа израсходовали? Температура газа в баллоне не изменялась.

6. В сосуде, из которого быстро откачивают воздух, находится небольшое количество воды при температуре 0 °C. За счет интенсивного испарения происходит постепенное замораживание воды. Какая часть первоначальной массы воды может быть таким образом превращена в лед? Удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}3$ МДж/кг, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг.

7. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора вставлены друг в друга так, что расстояние между любыми двумя соседними пластинами равно $d = 5$ мм (рис.11). Каждый конденсатор соединен с источником тока, напряжение которого $U = 100$ В. Одна из пластин каждого конденсатора заземлена. Найдите напряженность электрического поля E между пластинами a и b.

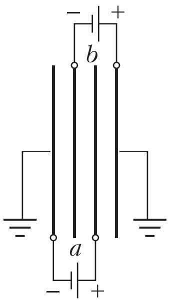


Рис. 11

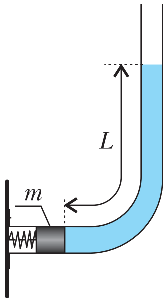


Рис. 12

8. Система, состоящая из пружины, поршня и столба жидкости длиной L (рис.12), выведена из состояния покоя и затем совершает свободные малые колебания. Пренебрегая трением, определите период этих колебаний, если масса поршня m, площадь поперечного сечения трубы S, плотность жидкости ρ, жесткость пружины k.

9. По двум горизонтальным проводящим рейкам, расстояние между которыми $L = 0{,}5$ м, может скользить без трения перемычка, масса которой $m = 100$ г, а омическое сопротивление $r = 0{,}5$ Ом (рис.13). Слева и справа концы реек соединены через резисторы, сопротивление каждого из которых $R = 2$ Ом. Система находится в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл. Неподвижной перемычке сообщают некоторую начальную скорость вдоль реек, и она, сместившись на расстояние $s = 3$ м, останавливается. Определите начальную скорость перемычки в метрах в секунду. Сопротивлением реек пренебречь. Перемычка расположена перпендикулярно рейкам.

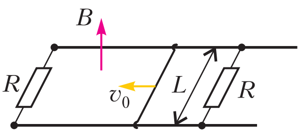


Рис. 13

Заключительный тур

Вариант 1

1. Частица, имеющая форму шарика радиусом $R = 0{,}6$ мкм, полностью поглощает падающий на нее свет . Определите плотность материала частицы, при которой гравитационное притяжение ее к Солнцу на любом расстоянии от него будет компенсироваться силой светового давления. Суммарная мощность светового излучения Солнца $W = 4 \cdot 10^{26}$ Вт, масса Солнца $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг.

2. Два одинаковых шара массой $m = 2$ кг каждый, соединенные невесомой пружиной жесткостью $k = 100$ Н/м, скользят по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью $v = 0{,}4$ м/с и налетают на вертикальную стенку (рис.14). Задний шар разрезан горизонтальной плоскостью на две части, как показано на рисунке. Найдите минимальную величину коэффициента трения между разрезанными частями заднего шара, при которой части не будут проскальзывать друг относительно друга при дальнейшем движении шаров. Удар считать абсолютно упругим. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

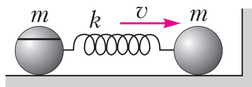


Рис. 14

3. К оси колеса, масса которого равномерно распределена по ободу, присоединена пружина, второй конец пружины прикреплен к стене (рис.15). С помощью нити, перекинутой через блок, к оси колеса подвешены два груза: $m_1 = 10$ кг и $m_2 = 5$ кг. Система пришла в движение с нулевой скоростью при недеформированной пружине. Считая, что колесо катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания, определите массу колеса M, если максимальная сила натяжения нити, соединяющей грузы, при их дальнейшем движении, $T = 80$ Н. Массами пружины, нити и блока пренебречь. Ускорение

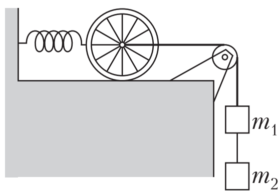


Рис. 15

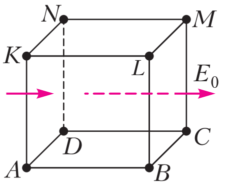


Рис. 16

свободного падения $g = 10$ м/с^2.

4. В однородном электрическом поле находится незаряженный проводящий куб $ABCDKLMN$, ориентированный так, что вектор напряженности поля $\vec{E}_0$ перпендикулярен грани куба $BCML$ (рис.16). Поверхностная плотность заряда в середине указанной грани равна $+\sigma_0$. Найдите модуль плотности зарядов в середине боковой грани $ADNK$ и верхней грани $KLMN$, если куб расположить так, что вектор напряженности поля будет параллелен диагонали AC нижней грани куба.

5. В электрической цепи, представленной на рисунке 17, сопротивление каждого резистора $r = 1$ Ом. Какая мощность будет выделяться в этой цепи, если к точкам 1 и 2 подсоединить батарею с ЭДС $\mathscr{E} = 6$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом?

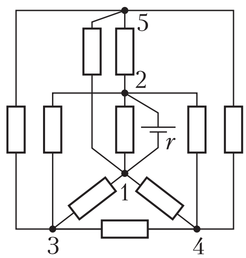


Рис. 17

6. Теплоизолированный сосуд, откачанный до глубокого вакуума, находится в большом объеме, заполненном смесью аргона и неона при давлении $p = 10^5$ Па и температуре $T_0 = 300$ К. Плотность смеси $\rho = 1{,}0$ кг/м^3. В некоторый момент открывают кран, и происходит заполнение сосуда газом. Определите температуру газа в сосуде после его заполнения. Какая часть внутренней энергии газа в сосуде приходится на атомы аргона? Давление газа вне сосуда считать неизменным.

Вариант 2

1. На дифракционную решетку с периодом 2 мкм падает нормально свет, пропущенный сквозь светофильтр. Фильтр пропускает волны длиной от 500 до 600 нм. Начиная с какого порядка спектры будут накладываться друг на друга?

2. Один конец каната удерживают на высоте h от земли, второй его конец касается земли. В момент времени $t = 0$ канат отпускают, и он начинает свободно падать на землю. Получите аналитическую зависимость силы, с которой канат будет давить на землю, от времени. Масса единицы длины каната равна ρ.

3. С ν молями идеального газа проводится циклический процесс, состоящий из двух изохор *1–2* и *3–4* и двух процессов *2–3* и *4–1* с линейной зависимостью давления от объема (рис.18). Температура газа в состояниях *1* и *4* равна T, а в состояниях *2* и *3* равна $2T$. Найдите работу, совершаемую газом в цикле *1–2–3–4–1*, если давления в состояниях *1* и *3* равны.

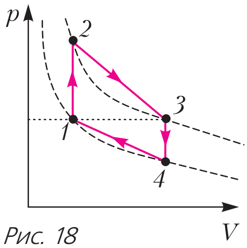


Рис. 18

4. Последовательно с электроплиткой сопротивлением $R = 50$ Ом в городскую сеть ($f = 50$ Гц) подключили катушку индуктивности с очень малым активным сопротивлением. При этом тепловая мощность плитки уменьшилась в $n = 4$ раза. Определите индуктивность катушки.

5. Пространство разделено на две половины граничной плоской поверхностью (рис.19). В верхней половине создано магнитное поле с индукцией B_1, а в нижней с индукцией B_2. Магнитные поля однородны и параллельны друг другу. С плоскости раздела перпендикулярно ей вылетает электрон со скоростью v_0 в сторону верхней половины пространства. Определите, с какой средней скоростью будет перемещаться электрон вдоль граничной поверхности.

Рис. 19

6. Вертикальная часть тонкой открытой с обоих концов L-образной трубки заполнена на длину L жидкостью и удерживается с помощью клапана K (рис.20). После открытия клапана вся жидкость из трубки вытекает. Найдите длину l математического маятника, период колебаний которого равен времени вытекания жидкости из вертикальной части L-образной трубки. Силами трения и поверхностного натяжения жидкости пренебречь.

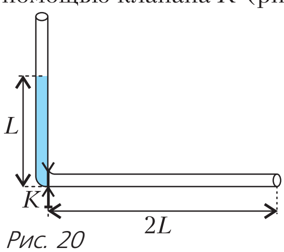


Рис. 20

Публикацию подготовил Ю.Струков

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №7)

1. Да.

Например, $(5+10+11+12+13)\cdot 3+$ $+(1+2+3+4+6+7+8+9)\cdot 7=433$.

Умножим все числа на 3. Их сумма станет равна $(1+2+\ldots+13)\cdot 3=273$. Осталось увеличить сумму чисел еще на $433-273=160$. Этого надо достичь добавлением учетверенной суммы каких-то восьми чисел, а значит, их сумма равна $160/4=40$. Осталось выбрать из чисел от 1 до 13 восемь чисел с суммой 40. Например, можно выбрать 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.

2. Могло.

См. пример на рисунке 1.

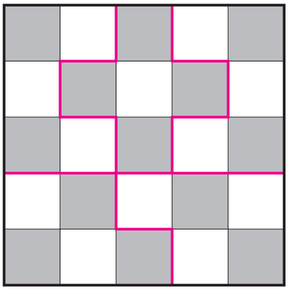


Рис. 1

3. 13 гостей.

Всего за год жители страны съели 18 коробок и $39+25\times 2+84\times 4+95\times 4+65\times 7=1260$ конфет. Значит, в каждой коробке было $1260:18=70$ конфет. Это количество каждый раз делилось поровну между собравшимися на дне рождения. Так как более 18 человек на дне рождения собраться не могло, то там могло присутствовать 14, 10, 7, 5, 2 или 1 человек, и каждый из них съедал 5, 7, 10, 14, 35 или 70 конфет соответственно. Рассмотрим одного из жителей, съевшего за год 25 конфет. Есть только три варианта, как он мог съесть такое количество: 5×5, $5\times 3+10$ или $5+10\times 2$. В любом случае на одном из дней рождения собравшиеся съели по 5 конфет, т.е. там присутствовало 14 человек. Но это наибольшее возможное количество, а по условию именно у Вани было больше всего людей на дне рождения. Значит, он пригласил 13 гостей.

4. $45°$ и $75°$.

Обозначим вершины четырехугольника, как показано на рисунке 2. Достроим ABC до квадрата $ABCX$ (рис.3). В треугольнике XCD угол XCD равен $\angle BCD-$ $-\angle BCX=150°-90°=$ $=60°$, а стороны CX и CD равны. Значит, треугольник XCD – равнобедренный с углом $60°$, т.е. равносторонний (в частности, отрезок XD также равен стороне квадрата).

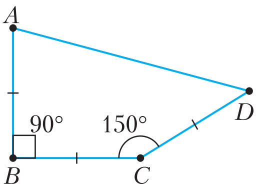


Рис. 2

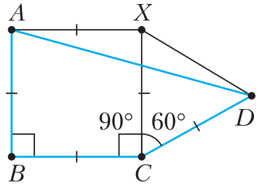


Рис. 3

Теперь, когда мы поняли, что наш четырехугольник получается из квадрата и правильного треугольника, можно посчитать его углы. Треугольник AXD равнобедренный с углом $90°+60°=150°$ при вершине (рис.4).

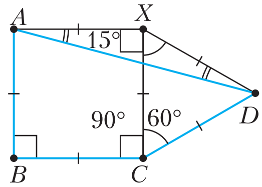


Рис. 4

Поэтому

$$\angle XAD=\angle XDA=\frac{180°-150°}{2}=15°.$$

Значит,

$$\angle BAD=\angle BAX-\angle XAD=90°-15°=75°,$$

$$\angle ADC=\angle XDC-\angle XDA=60°-15°=45°.$$

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Минимальная сумма расстояний от желтого столба до четырех красных равна 6 км (рис.5). Тогда максимальная сумма расстояний от желтого столба до двух оставшихся красных не превосходит $(14-6)$ км = 8 км. Поэтому максимальное расстояние между красными столбами равно 8 км.

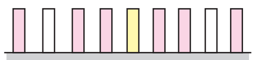


Рис. 5

2. Надо найти «отражение» точки B по другую сторону дороги (рис.6). На пересечении прямой AB' с дорогой лежит точка M, для нее сумма $AM+MB$ – минимальна, там и следует поставить остановку.

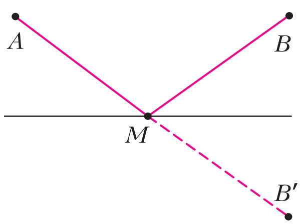


Рис. 6

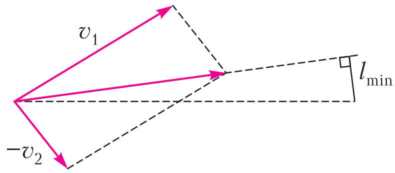


Рис. 7

3. В системе отсчета, связанной со вторым кораблем, первый движется по прямой вдоль вектора $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ (рис.7). Перпендикуляр, опущенный на эту прямую из местонахождения второго корабля, и будет искомым расстоянием l_{min}.

4. Скорость пловца относительно берега $\vec{v}$ задается направлением в точку максимального сноса (рис.8). С другой стороны, $\vec{v} = \vec{v}_{пл} + \vec{v}_р$, при этом

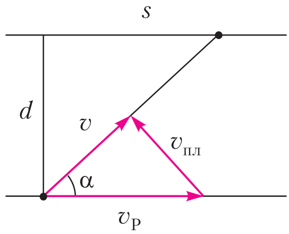


Рис. 8

скорость пловца будет минимальной, если $\vec{v}_{пл}$ составит прямой угол с $\vec{v}$. Таким образом,

$$v_{пл\,min} = v_р \sin\alpha = v_р \frac{d}{\sqrt{d^2 + s^2}} = 1{,}6\ \text{м/с}.$$

5. Если за все время движения проекция ускорения оставалась положительной, то скорость тела могла только возрастать. Поэтому наименьшей она была в начальный момент времени t_0, а наибольшей – в конечный момент t_3.

6. Площади под графиками различных вариантов движения (рис.9) равны – это путь из A в B. Очевидно, что минимальное время t_1 достигается, если половину пути тело движется равноускоренно, а вторую половину – равнозамедленно.

7. Время соскальзывания равно (рис.10) $t = \sqrt{\frac{2s/\cos\alpha}{g\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{4s}{g\sin 2\alpha}}$. Оно будет минимальным, если $\sin 2\alpha = 1$, $\alpha = 45°$, т.е. $h = s$.

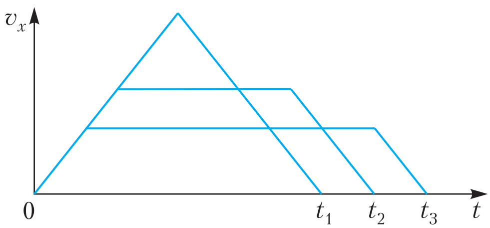


Рис. 9

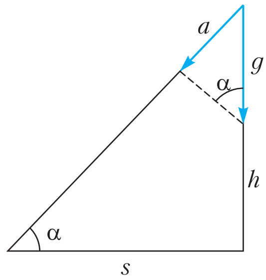


Рис. 10

8. Если скорость струи пара после отражения от лопатки, будет равняться нулю, то в энергию вращения турбины перейдет *вся* энергия струи пара. В таком случае скорость лопатки будет вдвое меньше скорости струи, что, кстати, и выполняется в рабочем режиме турбины.

9. Из уравнения Менделеева–Клапейрона получаем $p = \frac{R}{MV} mT = \alpha mT$, где α – постоянная. Следовательно, «изомассы» должны изображаться на графике прямыми, наклон которых тем больше, чем больше масса газа (рис.11). Таким образом, в точке A масса максимальна, а в точке B – минимальна.

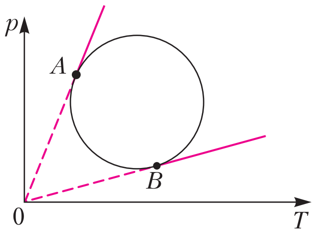


Рис. 11

10. Из условия следует, что конечная температура газа равна начальной T_0, т.е. на диаграмме p, V точки *1* и *2* лежат на одной изотерме.

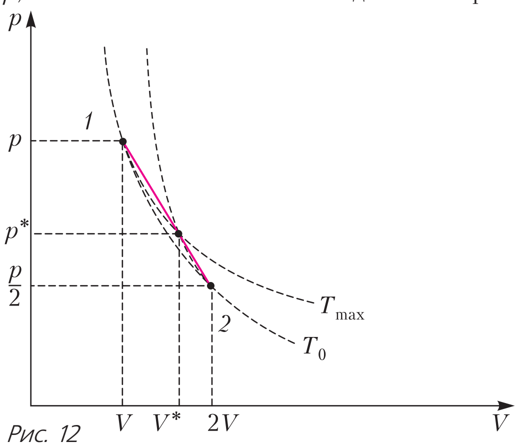


Рис. 12

Максимальная температура достигается в той точке с параметрами p^* и V^*, где график процесса касается изотермы с $T_{\max}$ (рис.12). Соображения симметрии приводят к значениям $p^* = \frac{3}{4}p$ и $V^* = \frac{3}{2}V$. Далее, $pV = \nu RT_0$ и $p^*V^* = \nu RT_{\max}$, откуда $T_{\max} = \frac{9}{8}T_0$.

11. При изменении расстояния d от предмета до линзы от ∞ до $2F$ расстояние от линзы до изображения пробегает значения от F до $2F$. При дальнейшем приближении предмета к линзе d и f как бы меняются местами : $2F \le d \le F$ и $2F \le f \le \infty$. Эта «симметрия» подсказывает, что минимальное расстояние между предметом и изображением $l = d + f$ равно $4F$, при этом $d = f = 2F$.

Микроопыт

Центр тяжести налитой воды стремится занять наинизшее положение. Поскольку объем налитой воды постоянный, то площадь основания должна быть наибольшей, а это соответствует кругу. Поверхность «расправится» так, чтобы принять форму прямого кругового цилиндра.

Обход многоугольника

Упражнения

2. Примеры показаны на рисунке 13.

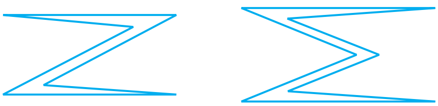


Рис. 13

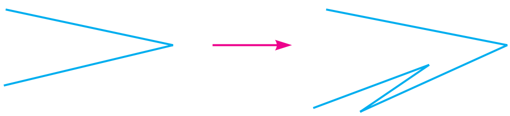


Рис. 14

3. Пример показан на рисунке 14.

4. $|S| = 9 \cdot 360°$. При изменении направления величина S меняется на противоположную (т.е. меняется знак числа S).

5. а) Пример приведен на рисунке 15, стрелкой показано направление обхода; б) пример приведен на рисунке 16.

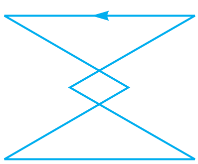


Рис. 15

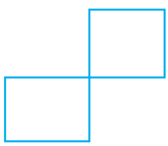


Рис. 16

Дополнительные задачи

1. Будем обходить границу многоугольника. Направление каждый раз изменяется на угол, кратный 10°, поэтому все направления образуют с начальным направлением углы, кратные 10°. Таких возможных направлений всего $360° : 10° = 36$. Так как направлений обхода сторон 19 и это больше 36/2, то среди них найдутся два одинаковых или противоположных. Значит, при движении вдоль этих двух направлений мы шли по параллельным сторонам.

2. а) 3, б) $[2n/3]+1$. *Указание*: используйте формулу суммы углов n-угольника.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Математика

Отборочный тур

1. 4. **2.** 34/45 . **3.** 6. **4.** 31. **5.** -1 . **6.** 4. **7.** 7. **8.** 20. **9.** 2. **10.** 4.

Заключительный тур

1. 3.

Левая часть уравнения – сумма двух положительных слагаемых. Если $x \le 2$, то $2^{6-2x} \ge 2^2 = = 4 > 3$ и равенство не выполнятся. Если $x \ge 4$, то $2^{x^2-8} \ge 2^8 > 3$ и снова равенство не выполняется. Решением может быть только $x = 3$. Проверка показывает, что 3 – решение уравнения.

2. $[2;\, 3] \cup \{6\}$.

Допустимыми являются те значения x, для которых $x^2 - 9x + 18 \ge 0$, т.е. $x \le 3$ или $x \ge 6$. При этом $x = 3$ и $x = 6$ – решения неравенства.

Если $x < 3$ или $x > 6$, неравенство сводится к $x^2 - 6x + 8 \le 0$, $(x-2)(x-4) \le 0$. При $x < 3$ оно выполняется, если $x \ge 2$, а при $x > 6$ не выполняется ни при одном значении x.

3. 2.

Положим $a_n = f_n(2)$. Тогда $a_1 = 3^3 - 1$, $a_2 = \left(3^3\right)^3 - 1 = 3^{3^2} - 1$, $a_3 = \left(3^{3^2}\right)^3 - 1 = 3^{3^3} - 1, \ldots$ $\ldots$, $a_n = 3^{3^n} - 1$. Мы должны найти целочисленные решения неравенства $3^{3^5} < 3^{3^n} - 1 < 3^{3^7}$.

Неравенство выполнено при $n = 6,\ 7$, т.е. при двух значениях n.

4. 93.

Пусть $n + 7 = i^2$, $n + 51 = j^2$. Тогда $44 = j^2 - i^2 = = (j-i)(j+i)$. Числа $j+i$ и $j-i$ имеют одинаковую четность, поэтому $j + i = 22$, $j - i = 2$; $j = 12$; $n + 51 = 12^2$, $n = 93$.

5. 5, 6, 7, 10.

Пронумеруем ящики по возрастанию числа игрушек, через n_i обозначим число игрушек в i-м ящике. Тогда $n_1 < n_2 < n_3 < n_4$, $n_1 + n_2 + n_3 +$

$+ n_4 = 28,\ n_4 = 2n_1$. Получается, что

$$28 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \ge n_1 + n_1 + 1 + n_1 + 2 + n_1 + 3 = 4n_1 + 6.$$

Следовательно, $n_1 \le 5$. С другой стороны,

$$28 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \le n_4 - 3 + n_4 - 2 + n_4 - 1 + n_4 = 4n_4 - 6,\ 4n_4 \ge 34,\ 4n_1 \ge 17,\ n_1 \ge 5.$$

Итак, $n_1 = 5$, $n_4 = 10$. Теперь единственным образом мы можем назначить значения $n_2 = 6$, $n_3 = 7$.

6. $a \in (1/2;\ 3/5]$.

При $a = \pm 1$ уравнение имеет бесконечное число решений (если $a = 1$, решением является любое целое число; если $a = -1$, любое число из $[0;\ 1)$ – решение), при $a \le 0$, $a \ne -1$ и при $a > 1$ – только нулевое решение. Интерес представляют $a \in (0;\ 1)$. Поскольку $\{x\} = x - [x]$, уравнение можно записать в виде $2[x] - x = ax$. Полагая $k = [x] \in \mathbb{Z}$, получаем «возможные» решения $x_k = \dfrac{2k}{a+1}$; x_k – решение уравнения, если $k = \left[\dfrac{2k}{a+1}\right]$, т.е. если $k \le \dfrac{2k}{a+1} < k + 1$. Левое неравенство выполняется при всех $k \ge 0$; правое можно переписать в виде

$$\frac{k-1}{k+1} < a.$$

Мы получим 4 решения $\left(0,\ \dfrac{2}{a+1}, \dfrac{4}{a+1}, \dfrac{6}{a+1}\right)$, если $\dfrac{1}{2} < a \le \dfrac{3}{5}$.

7. 36.

В первом случае пассажир сместился относительно траволатора на 30 ступеней, а траволатор продвинулся на m ступеней. В итоге пассажир продвинулся на $30 + m$ ступеней. Во втором случае траволатор сместился на n ступеней, пассажир продвинулся на $45 - n$ ступеней. Продвижения пассажира одинаковы, $30 + m = 45 - n$, $m + n = 15$. Отношение скоростей траволатора и пассажира равно $\dfrac{m}{30} = \dfrac{n}{45}$. Получается, что $\dfrac{m}{2} = \dfrac{n}{3}$; $m = 6, n = 9$. По неподвижному траволатору пассажир пройдет по $30 + m = 45 - n = 36$ ступеням.

8. $2\sqrt{3} + 3$.

Пусть a, b – длины сторон, образующих угол 120°. По теореме косинусов, $a^2 + b^2 + ab = 9$. Отсюда $3(a+b)^2 + (a-b)^2 = 36$. Сумма $a + b$ достигнет своего наибольшего значения, если $a = b$. При таком условии $a + b = 2\sqrt{3}$, $a = b = \sqrt{3}$, а периметр треугольника равен $2\sqrt{3} + 3$.

9. $(1,3), (3,1)$.

Преобразуем первое уравнение системы:

$$1 + y^2x^{-2} = 16x^{-2} - 2yx^{-1},$$
$$x^2 + y^2 = 16 - 2xy,$$
$$(x+y)^2 = 16,$$
$$x + y = \pm 4.$$

Второе уравнение можно записать в виде $(x^2 + y^2)(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 280$. Из этого равенства вытекает условие $x + y > 0$. Следовательно, $x + y = 4$. Второе уравнение принимает вид

$$\left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 - xy + y^2\right) = 70,$$
$$\left((x+y)^2 - 2xy\right)\left((x+y)^2 - 3xy\right) = 70,$$
$$(16 - 2xy)(16 - 3xy) = 70,$$
$$3(xy)^2 - 40(xy) + 93 = 0,$$
$$xy = 3 \text{ или } xy = \frac{31}{3}.$$

Мы приходим к двум системам

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = 4, \\ xy = \dfrac{31}{3}. \end{cases}$$

Первая система имеет решения $(1,3)$, $(3,1)$, а вторая решений не имеет.

10. $3x^6 + 3x^4$.

Поскольку в левой части равенства стоит многочлен восьмой степени, то $n = 8$. Полагая $x = 1$ в равенстве $P(x)\left(x^2 - 1\right) = ax^n - 3x^4$, находим $a = 3$. Из получающегося равенства $P(x)\left(x^2 - 1\right) = 3x^8 - 3x^4$ следует, что $P(x) = 3x^6 + 3x^4$.

Физика

Отборочный тур

1. $t = \dfrac{1}{2(n+1)}\left(n(t_1 + t_2 - t_3) + 2(t_1 - t_3)\right) = 11$ ч.

2. $\mu = \left(1 - (1-\eta)^2\right)\operatorname{tg}\alpha = 0{,}208$ (здесь $\eta = 0{,}2$).

3. $\Delta h = \dfrac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\dfrac{v_1^2}{2g} = 4{,}93$ мм.

4. $m = \rho_{\text{в}} S \dfrac{x_1}{x_2}(x_1 + x_2) = 175$ кг.

5. $n_2 = n_1\sqrt{\dfrac{p-1}{p-2}} = 7{,}67$ (здесь $n_1 = 7,\ p = 7$).

6. $\eta = 100\left(1 - \dfrac{T_1}{T_2}\right) = 4{,}79\%$.

7. $s = \dfrac{mL}{nF}\left(1 - \dfrac{T_2}{T_1}\right) = 460$ км.

8. $d_2 = d_1 \dfrac{\varphi_1 - \varphi}{\varphi - \varphi_2} = 24{,}3$ см.

9. $q = \dfrac{Q}{U} = 0{,}110$ Кл.

10. $h = d\dfrac{\sqrt{4n^2 - 2}}{\sqrt{2n^2 - 1} - 1} \approx 106$ см.

Заключительный тур

1. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\mu - 1}{\mu + 2} = 0{,}214$, $\alpha = 12°$.

2. $\Delta x = \dfrac{11m}{5m + M}\dfrac{l}{3}$.

3. $l_0 = \dfrac{l_2\Delta l_2 - l_1\Delta l_1}{l_2 - l_1} = 3{,}5$ см, $L = l_1 + l_0 + l_2 = 11{,}5$ см (здесь l_0 – первоначальная длина пузырька).

4. $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{81}{25} = 3{,}24$.

5. $\Delta\omega = \omega\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 83{,}3$ рад/с.

6. $d = D - h\dfrac{4}{\sqrt{5}} \approx 2{,}1$ см.

Информатика

Отборочный тур

1. 7. **2.** 71. **3.** 97. **4.** 1269. **5.** 38; 88. **6.** 11. **7.** B, E, F.

Заключительный тур

1. =МИН(ОКРУГЛВВЕРХ(F6/$D$3;0)*E6; ОКРУГЛВВЕРХ(F6/$D$2;0)*D6; (F6-ОСТАТ(F6;$D$2))/$D$2*D6 + ОКРУГЛВВЕРХ(ОСТАТ(F6;$D$2)/$D$3;0)*E6)) (возможны иные написания аргументов минимума). **2.** 55 (функция реализует операцию XOR, парные значения взаимно уничтожаются). **3.** 0. **4.** а) (1, 4); б) (1, 1579). **5.** 425. **6.** МОНБЛАН. **7.** 14. **8.** 1 мин. **9.** A $\wedge$ B. **10.** 1 бит (высказывание позволяет определить, четно X или нечетно).

Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана

Отборочный тур

Вариант 1

1. $h_1 = 2h\left(\dfrac{\rho V}{m} - 1\right) - H = 1$ м (примените закон сохранения энергии при движении шара вниз и вверх; $\rho = 10^3$ кг/м^3 – плотность воды).

2. Произойдет 5 столкновений.

3. $\rho = \dfrac{8}{3}R = 80$ см (точка A вращается относительно центра диска и вместе с диском – по внутренней цилиндрической поверхности).

4. $Q = 400$ Дж (воспользуйтесь законами сохранения импульса и полной энергии).

5. $p = \dfrac{m_1RT}{MV} = 0{,}84$ МПа (вся вода превратилась в ненасыщенный пар).

6. $A = \dfrac{\eta A_T}{1 - \eta} = 100$ Дж.

7. $\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2} = 2$.

8. $\dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{(12/5)C}{(12/9)C} = \dfrac{9}{5} = 1{,}8$.

9. $v = \left(\dfrac{mg}{BL} - \dfrac{\mathcal{E}}{r}\right)\dfrac{Rr}{BL(R + r)} = 6$ м/с.

Вариант 2

1. $F = \dfrac{2 - \mu}{2\mu - 1}\dfrac{mg}{2} = \dfrac{mg}{2}$ (запишите условия равновесия уголка для возможных поступательного и вращательного движений).

2. $s = \dfrac{L(n + 1)}{n - 3} = 15$ м (воспользуйтесь законами сохранения импульса и энергии для абсолютно упругого удара).

3. $v_D = 2\omega \cdot OA = 1$ м/с.

4. $F = 9560$ Н (уровень воды в обоих отсеках будет отклонен от горизонтали на угол α такой, что $\operatorname{tg}\alpha = a/g$).

5. $\dfrac{\Delta m}{m} = 0{,}67$ (манометр показывает разность между давлением газа в баллоне и атмосферным давлением).

6. $\dfrac{\Delta m}{m} = \dfrac{r}{\lambda + r} = 0{,}87$.

7. $E = \dfrac{\Delta\varphi}{d} = \dfrac{2U}{d} = 40$ кВ/м.

8. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_{сист}}{k_{сист}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m + \rho SL}{k + \rho gS}}$.

9. $v_0 = \dfrac{2B^2L^2s}{m(R + 2r)} = 0{,}2$ м/с (начальная кинетическая энергия равна количеству теплоты, выделившемуся в цепи).

Заключительный тур

Вариант 1

1. $\rho = \frac{3W}{16\pi GcRM} = 10^3$ кг/м^3 (сила светового давления равна $F_{\text{св}} = Np_{\text{ф}}$, $p_{\text{ф}} = \frac{h\nu}{c}$, $h\nu = \frac{W_0}{N}$, $W_0 = \frac{W}{4\pi r^2}\pi R^2$, сила гравитационного притяжения равна $F_{\text{гр}} = G\frac{mM}{r^2}$).

2. $\mu_{\min} = \frac{v}{g}\sqrt{\frac{2k}{m}} = 0,4$ (система совершает гармонические колебания).

3. $M = \frac{m_1 + m_2}{2}\left(\frac{m_2 g}{T - m_2 g} - 1\right) = 5$ кг (запишите второй закон Ньютона для момента времени, когда груз массой m_2 находится в самом нижнем положении, выразите отсюда его ускорение и свяжите его с амплитудой и частотой гармонических колебаний системы).

4. Используя принципы симметрии и суперпозиции, найдем плотности в середине боковой грани: $\sigma_1 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}}$ и в середине верхней грани: $\sigma_2 = 0$.

5. $P = \frac{10\mathscr{E}^2}{49r} = 7,35$ Вт (внешнее сопротивление цепи равно $\frac{2}{5}r$).

6. $T = \frac{5}{3}T_0 = 500$ К; $\alpha = 0,25$ (в смести находятся один моль аргона и три моля неона).

Вариант 2

1. Начиная с пятого порядка.

2. $F = \frac{3}{2}\rho g^2 t^2$ (эта сила складывается из силы действия падающего элемента каната и силы тяжести уже лежащей на земле части каната).

3. $A = \frac{3}{4}\nu RT$ (работа численно равна площади под графиком).

4. $L = \frac{R\sqrt{n-1}}{2\pi f} = 0,27$ Гн (общее сопротивление последовательно соединенных активного сопротивления R и индуктивного сопротивления катушки равно $\sqrt{R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2}$).

5. $u = \frac{2v_0 (B_2 - B_1)}{\pi (B_1 + B_2)}$ (в каждой половине пространства электрон движется по полуокружности со своим радиусом и своим временем полуоборота).

6. $l = \frac{L}{16}$ (с помощью закона сохранения энергии можно показать, что вытекание жидкости удовлетворяет уравнению гармонических колебаний с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$).

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ № 202525

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: +7 916 168-64-74
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

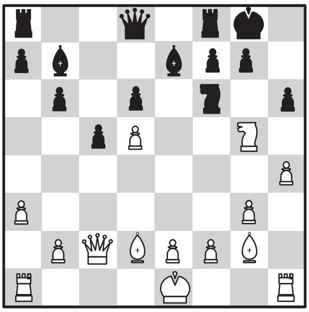
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 216-40-40

Подъем ладьи

Сегодня мы продолжим разбирать партии из матча между AlphaZero и Stockfish, а нашей темой станет необычный перевод ладьи с одного фланга на другой, принесший в 1979 году яркую победу Михаилу Талю. Если бы мы не знали, что AlphaZero спроектирована по принципу самообучающейся нейронной сети, то определенно могли бы предположить, что она знакома с этой партией «Волшебника из Риги». В любом случае сам факт «заимствования» идеи искусственным интеллектом говорит о глубине понимания шахмат восьмым чемпионом мира.

AlphaZero–Stockfish
Лондон, 2018

1. d4 ♞f6 2. c4 e6 3. ♘f3 b6 4. g3 ♝b7 5. ♗g2 ♝b4+ 6. ♗d2 ♝e7 7. ♘c3 0-0 8. ♕c2 ♞a6 9. a3. Новинка. Белые предупреждают возможное 9... ♞b4 и сохраняют возможность рокироваться в обе стороны. **9...c5 10. d5 ed 11. ♘g5 ♞c7 12. h4 h6** (брать коня опасно из-за угроз по линии h) **13. ♘d5 ♞cd5 14. cd d6.**

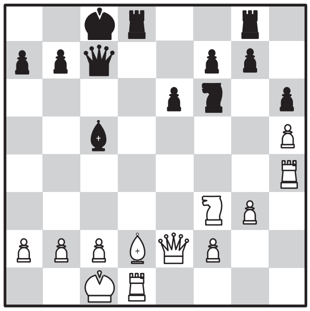


15. a4! Белковому шахматисту едва ли пришел в голову такой ход: зачем добровольно ослаблять пешечную структуру? Однако этот ход сильнейший в данной позиции! **15...♛d7.** Глубина замысла белых раскрывается в следующем варианте: 15… ♜e8 16. ♖a3 (подъем ладьи!) ♝f8 17. ♖f3 hg 18. hg ♞e4 19. ♖f4 с последующим ♖fh4 и смертельными угрозами по линии h. Фантастический перевод ладьи! **16. ♗c3.** (16. ♖a3 также было бы сильно, но AlphaZero вносит небольшие коррективы в свой замысел) **16...♜fe8 17. 0-0-0 ♝d8.** В случае напрашивающегося 17…b5 белые наносят ряд ударов легкими фигурами и ставят красивый мат: 18. ♘f7 ♚f7 19. ♗h3 ♛c7 20. ♗e6+ ♚f8 21. ♗a5 ♛a5 22. ♕g6, и мат на f7 неизбежен. **18. e4 ♞g4 19. ♗h3 hg 20. f3 f5 21. fg fg.** Лучший шанс черных заключался в блокировании линий на королевском фланге: 21…fe 22. ♗f1 ♛g4 23. ♗e2 ♛f5 24. ♔b1 g4 25. ♖hf1 ♛g6 26. ♖f4, однако и в этом случае шансы белых заметно лучше. **22. ♗f1!** Еще один плюс хода 15. a4: белые с решающим эффектом подключают к атаке белопольного слона. **22...gh 23. ♗b5 ♛f7 24. gh.** Пешечная структура черных на королевском фланге безнадежно ослаблена, что технично использует AlphaZero. Оставшуюся часть партии приводим без комментариев. **24...♝f6 25. ♖hf1 ♜f8 26. ♗f6 gf 27. ♖f4 ♛g7 28. ♗e2 ♛h6 29. ♖df1 g3 30. ♕d3 ♚h8 31. ♕g3 ♜ae8 32. ♗d3 ♝c8 33. ♔b1 ♜f7 34. ♕f2 ♝d7 35. h5 ♜ef8 36. ♗c2 ♝e8 37. ♖f3 ♜e7 38. ♖f6 ♛f6 39. ♕f6+ ♜f6 40. ♖f6 ♚g7 41. ♖d6 ♝h5. 42. ♔c1 ♜e5 43. a5 ba 44. ♔d2 ♝e8 45. ♖a6 ♜h5 46. ♗d3 a4. 47. d6 ♝f7 48. d7 ♜h8 49. e5, и черные признали поражение.**

А вот для сравнения знаменитая партия Таля.

М.Таль – Р.Хюбнер
Монреаль, 1979

1. e4 c6 2. d4 d5 3. ♘d2 de 4. ♘e4 ♝f5 5. ♘g3 ♝g6 6. h4 h6 7. ♘f3 ♞d7 8. h5 ♝h7 9. ♗d3 ♝d3 10. ♕d3 ♞gf6 11. ♗f4 ♛a5+ 12. ♗d2 ♛c7 13. 0-0-0 e6 14. ♘e4 0-0-0 15. g3 ♞e4 16. ♕e4 ♞f6 17. ♕e2. Разыгран классический вариант защиты Каро-Канн, и едва ли можно предположить, что черным может исходить какая-то угроза от белой ладьи h1. **17...c5 18. dc ♝c5 19. ♖h4!** Новинка, ставшая после этой партии типичным маневром. Белые «поднимают» ладью, чтобы перевести на c4 и связать слона.



19...♚b8?! Стремясь избавиться от связки по вертикали, черные попадают под еще более мощную связку по диагонали. **20. ♗f4 ♝d6 21. ♖d6!** Решающая жертва качества, материальные потери для черных неизбежны. **21...♜d6 22. ♘e5 ♚a8 23. ♘c4 ♞e8 24. ♖g4 ♛e7 25. ♘d6 ♞d6 26. ♖g7.** В результате серии разменов белые выиграли пешку и получили подавляющее позиционное преимущество. Остальное дело техники. **26...♞f5 27. ♖g4 ♜d8 28. ♗e5 f6 29. ♗c3 e5 30. b3 a6 31. ♔b2 ♛e6 32. ♕c4 ♛e8 33. ♖g6 ♜c8 34. ♕a4 ♛d8 35. ♕e4 ♞d6 36. ♕d3 ♛c7 37. ♗b4 ♞b5 38. ♖f6 a5 39. ♗d6 ♞d6 40. ♖d6 e4 41. ♕d2, и черные сдались.**

А.Русанов

Индекс 90964

Экстремальные решения в природе

Что объединяет форму пчелиных сот
и форму мыльной пленки на
проволочном каркасе?

ISSN 0130-2221 20008
9 770130 222207

(Ответ – на с. 32 внутри журнала)